Calcul diferenţial şi integral
(notiţe de curs)

Şt. Balint
E. Kaslik, L. Tănasie, A. Tomoioagă, I. Rodilă, N. Bonchiş, S. Mariş

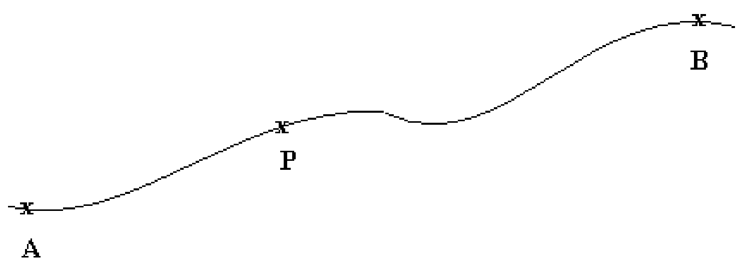
Cuprins

La ce poate fi util un curs de calcul diferenţial şi integral pentru un student de anul întâi care doreşte să fie licenţiat în informatică?

Această întrebare ne-a fost pusă de mai multe ori chiar la primele lecţii de către studenţii care au participat la curs.
Este dificil să dăm un răspuns complet şi convingător la întrebare la început pentru că trebuie să vorbim despre utilitatea unor concepte şi instrumente matematice pe care cei care întreabă nu le cunosc încă în rezolvarea unor probleme cu care nu s-au întâlnit.
Chiar dacă aşa stau lucrurile întrebarea nu trebuie şi nu poate fi ocolită. Este necesar să formulăm un răspuns parţial care arată utilitatea acestei discipline în rezolvarea unei probleme reale şi o face interesantă pentru viitorii informaticieni. Dorim să subliniem aici că pentru studenţii care au optat pentru licenţă în matematică disciplina de calcul diferenţial şi integral reprezintă o parte consistentă a edificiului matematicii pe care ei trebuie să-l studieze şi problema utilităţii nu se pune de obicei în termenii unei utilităţi în afara matematicii.

Revenim acum la încercarea de formulare a unui răspuns parţial promis studenţilor informaticieni. Dorim să spunem de la început că în acest curs vor fi prezentate concepte şi instrumente clasice de calcul diferenţial şi integral folosite în analiza funcţiilor reale sau vectoriale de una sau mai multe variabile reale. Pentru a ilustra utilitatea unor concepte şi instrumente prezentate în curs vom considera problema reală de elaborare a unui mers al trenurilor şi vom sublinia acea fază în care anumite concepte şi instrumente de calcul diferenţial sunt utile.

Elaborarea unui mers al trenurilor pentru o reţea de căi ferate dată este o problemă reală şi complexă. Ea se bazează pe: cunoaşterea restricţiilor de viteză pe reţea; pe cunoaşterea staţiilor; pe cunoaşterea materialului rulant care urmează să circule pe reţea; pe opţiuni privind oprirea sau nu şi staţionarea unor trenuri în anumite staţii şi pe un calcul prealabil din care rezultă că dacă nu intervin lucruri neprevăzute atunci conform mersului, trenurile nu se ciocnesc. Anumite concepte şi instrumente de calcul diferenţial şi integral se dovedesc utile tocmai în acest calcul. Vom ilustra un fragment dintr-un asemenea calcul. Pentru a se asigura că trenurile nu se ciocnesc este necesar să cunoaştem la fiecare moment poziţia trenurilor care circulă pe aceeaşi linie şi să ne asigurăm că nu există un moment la care poziţiile a două trenuri coincide. Să alegem de exemplu linia Timişoara Bucureşti pe care o reprezentăm cu o curbă $\widetilde{AB}$ ca în figura următoare:



iar un tren care circulă pe această linie în intervalul de timp $[t_0, t_0+T]$ va fi reprezentat cu un punct P. Dacă în intervalul de timp considerat sunt mai multe trenuri care circulă pe

această linie va trebui să descriem mişcarea fiecăruia. Pentru a descrie matematic mişcarea unui tren reprezentat cu P, putem asocia fiecărui moment de timp $t \in [t_0, t_0+T]$ lungimea arcului de curbă $\widehat{AP}$, unde P este punctul de pe curba $\widehat{AB}$ unde se află trenul la momentul t. Se obţine astfel o funcţie f definită pentru $t \in [t_0, t_0+T]$ şi care are valori în mulţimea $[0, l]$: $f : [t_0, t_0+T] \to [0, l]$; l este distanţa pe calea ferată de la A la B.
Subliniem aici că obiectul apărut aici în mod natural pentru a descrie mişcarea unui tren, este o funcţie reală de o variabilă reală care este un obiect matematic şi este un subiect de studiu al cursului.
Trenul despre care vorbim, trebuie să sosească la anumite ore în staţiile în care are opriri şi are restricţii de viteză pe parcurs, de aceea funcţia f poate fi destul de complicată. Cu toate acestea sunt câteva caracteristici ale mişcării reale care trebuie să se regăsească în proprietăţile funcţiei f. Astfel, de exemplu, mişcarea reală este continuă; prin aceasta înţelegem că trenul P ajunge dintr-o poziţie P_1 într-o poziţie P_2 treptat, trecând prin toate poziţiile intermediare şi nu printr-un salt. Aceasta înseamnă că funcţia f care descrie mişcarea chiar dacă este complicată trebuie să aibă următoarea proprietate: oricare ar fi $t_2 \in [t-0, t_0+T]$ dacă t_1 tinde la t_2 atunci $f(t_1)$ tinde la $f(t_2)$.
O funcţie cu o asemenea proprietate, se numeşte în curs, funcţie continuă pe segmentul $[t_0, t_0+T]$ şi este studiată punându-se în evidenţă diferite proprietăţi ale acesteia. Prin urmare funcţiile continue studiate în cadrul cursului sunt utile, de exemplu, pentru a descrie mişcarea unui tren pe o linie ferată.
Dacă trenul pleacă în momentul t_0 din staţia A şi se îndepărtează continuu de A fără să se oprească până la momentul t_1 în prima staţie S_1 atunci funcţia f care descrie mişcarea are următoarea proprietate: oricare ar fi $t', t'' \in [t_0, t_1]$, $t' < t''$ rezultă $f(t') < f(t'')$. În curs o funcţie cu această proprietate este numită monoton crescătoare. Tot în curs sunt prezentate şi funcţiile monoton descrescătoare şi proprietăţi ale funcţiilor monotone. În cazul mişcării considerate, acest concept este util pentru că exprimă apropiere sau îndepărtare.
Datorită restricţiilor de viteză şi a opririlor în staţii viteza trenului depinde de locul în care se află. Mai exact depinde de momentul t: aceasta întrucât trenul în intervalul de timp $[t_0, t_0+T]$ poate să treacă de mai multe ori prin acelaşi loc. Pentru a afla viteza trenului la momentul t_1 se consideră viteza medie $\dfrac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1}$ pe un interval de timp mic $[t, t_1]$ şi limita acesteia pentru t tinzând la t_1 reprezintă viteza trenului la momentul t_1. În curs această limită se numeşte derivata funcţiei f în t_1 şi se notează $f'(t_1)$. Dacă trenul se află într-o staţie în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ atunci viteza lui este zero $f'(t) = 0$ pentru $t \in [t_1, t_2]$. Dacă $f'(t) > 0$, atunci trenul se îndepărtează de A, iar dacă $f'(t) < 0$ atunci trenul se apropie de A. Dacă trenul merge cu o viteză constantă în intervalul $[t_1, t_2]$, atunci $f'(t) = \mathit{const}$ pe intervalul $[t_1, t_2]$. Aceste consideraţii arată cât de util este conceptul de derivată studiat în curs în descrierea mişcărilor mecanice.

În final subliniem că dintr-un profil de viteză $v(t)$ (care rezultă din restricţii de viteză, fixarea apriori a momentelor de sosire şi plecare din staţii) funcţia $f(t)$ care descrie mişcarea se recuperează folosind formula integrală:

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau.$$

prezentată în curs.
Nădăjduim să credem că această argumentaţie extrem de simplă şi parţială reuseşte

să convingă studenţii informaticieni că vor face cunoştiinţa la acest curs cu obiecte şi rezultate matematice utile ce le vor fi de folos în viitoarea carieră de informatician.

Cursul scris este prezentat într-o formă destul de standard foarte asemănător cu un curs prezentat pentru cei care se pregătesc să fie licenţiaţi în matematică.
Cursul vorbit însă este plin cu comentarii şi exemple menite să ilustreze pe parcurs utilitatea şi aplicabilitatea conceptelor şi a rezultatelor la rezolvarea unor probleme reale.

Autorii

Partea I

Introducere

1 Noţiunile: mulţime, element al unei mulţimi, apartenenţa la o mulţime: sunt noţiuni fundamentale în matematică.

Într-un curs de matematică riguros, noţiunile care se folosesc trebuiesc definite.
O definiţie descrie o noţiune (A) folosind o altă noţiune (B) presupusă cunoscută sau în orice caz mai simplă decât (A). Noţiunea (B) la rândul ei trebuie şi ea să fie definită şi în definiţia ei se va folosi o altă noţiune (C) mai simplă ca (B), şi aşa mai departe.
Astfel, în construcţia unei teorii matematice, în care noţiunile sunt definite, se degajă un set restrâns de noţiuni simple la care celelalte pot fi reduse şi care la rândul lor nu sunt definite. Noţiunile din acest set vor fi numite noţiuni fundamentale. Noţiunile fundamentale în matematică trebuie să fie aşa de evidente ca să nu necesite definiţii. Semnificaţia noţiunilor fundamentale se descrie prin exemple.
Noţiunile: mulţime, element al unei mulţimi, apartenenţa unui element la o mulţime, sunt noţiuni fundamentale în matematică. Nu există definiţii precise a acestor noţiuni, dar semnificaţia lor se poate clarifica prin exemple.
Să considerăm noţiunea de mulţime. Putem vorbi fără nici o ambiguitate despre: mulţimea studenţilor dintr-o sală de curs, mulţimea zilelor dintr-un an, mulţimea punctelor dintr-un plan, etc. În cazurile enumerate; fiecare student din sala de curs, fiecare zi a anului, fiecare punct al planului este un element al mulţimii respective.
Atunci când se consideră o mulţime concretă ceea ce este esenţial este ca să existe un criteriu în baza căruia se poate decide pentru orice element dacă aparţine sau nu aparţine la mulţime. Astfel, în cazul mulţimii zilelor unui an; "20 mai", "3 iulie", "29 decembrie" sunt elemente ale mulţimii, iar "miercuri", "vineri", "ziua liberă", "ziua lucrătoare" nu sunt elemente ale mulţimii. În cazul mulţimii punctelor dintr-un plan doar punctele din planul considerat sunt elemente ale mulţimii. Dacă un punct nu este în planul considerat sau dacă elementul nu este un punct, atunci punctul sau elementul nu este element al mulţimii.
Pentru a defini o mulţime concretă este necesar să se descrie clar elementele care aparţin acestei mulţimi. Orice descriere defectuoasă poate duce la contradicţie logică.

2 Simboluri folosite în teoria mulţimilor.

Dacă x este un element al mulţimii A, atunci aceasta se notează astfel $x \in A$. Dacă x nu este element al mulţimii A, atunci aceasta se notează cu $x \notin A$. Simbolul $\in$ se numeşte simbolul apartenenţei.

Definiţia 2.1. *Două mulţimi A şi B care sunt formate exact din aceleaşi elemente se zic egale.*

Altfel spus în familia mulţimilor egalitatea $A = B$ înseamnă că aceeaşi mulţime se notează cu litere diferite, sau altfel, A şi B sunt nume diferite pentru aceeaşi mulţime. Notaţia $A = \{x, y, z, ...\}$ înseamnă că mulţimea A este formată din elementele $x, y, z, ...$ Dacă într-o asemenea notaţie anumite simboluri se repetă acestea desemnează acelaşi element. De exemplu: $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
O mulţime A formată din toate elementele x ale unei mulţimi B care au o anumită proprietate, se notează astfel: $A = \{x \in B| \ ...\}$, unde proprietatea este specificată după linia verticală. De exemplu, fie a şi b două numere reale astfel încât $a < b$. Mulţimea de puncte ale intervalului închis $[a, b]$ este mulţimea $[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R}^1 \;\middle|\; a \leq x \leq b\right\}$, unde $\mathbb{R}^1$ este mulţimea tuturor numerelor reale.

Definiţia 2.2. *Dacă orice element dintr-o mulţime A este element al unei mulţimi B, atunci zicem că A este o submulţime a mulţimii B şi notăm $A \subset B$ sau $B \supset A$.*

Relaţia $A \subset B$ se citeşte astfel "mulţimea A este inclusă în mulţimea B", iar relaţia $B \supset A$ se citeşte astfel "mulţimea B include mulţimea A". Se vede uşor că $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$.

3 Operaţii cu mulţimi.

Definiţia 3.1. *Oricare ar fi mulţimile A şi B reuniunea $A \cup B$ este mulţimea de elemente care aparţin la A sau la B sau la ambele mulţimi.*

Definiţia 3.2. *Oricare ar fi mulţimile A şi B intersecţia $A \cap B$ este mulţimea de elemente care aparţin la A şi la B.*

Definiţia 3.3. *Oricare ar fi mulţimile A şi B diferenţa $A - B$ este mulţimea de elemente din A care nu aparţin la B.*

Dacă mulţimea B este o submulţime a mulţimii A atunci mulţimea $A - B$ se numeşte complementara lui B în A şi se notează $C_A B$.
Comentariu:

1. Este posibil ca două mulţimi A şi B să nu aibă nici un element în comun. Într-un asemenea caz intersecţia $A \cap B$ nu are nici un element. Cu toate acestea convenim ca şi în asemenea cazuri să considerăm că intersecţia $A \cap B$ este o mulţime; care nu conţine nici un element. Această mulţime se numeşte mulţimea vidă (sau mulţimea nulă) şi se notează cu simbolul $\emptyset$.

2. Noţiunile de reuniune a două mulţimi şi de intersecţie a două mulţimi pot fi extinse la trei, patru, cinci sau mai multe mulţimi. Astfel:
   Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt n mulţimi atunci:
   - reuniunea $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ este mulţimea elementelor care aparţin la cel puţin una din mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n$.
   - intersecţia $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ este mulţimea elementelor care aparţin la toate mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n$.

3. Oricare ar fi mulţimea A sunt adevărate următoarele incluziuni: $A \subset A$ şi $\emptyset \subset A$. Altfel spus mulţimea A şi mulţimea vidă $\emptyset$ sunt submulţimi ale mulţimii A. Aceste două submulţimi ale lui A se numesc submulţimi improprii ale mulţimii A. O submulţime B a mulţimii A diferită de A şi $\emptyset$ se numeşte submulţime proprie a mulţimii A.

4. Uneori reuniunea mulţimilor poartă denumirea de suma mulţimilor şi intersecţia mulţimilor poartă denumirea de produs al mulţimilor.

5. Operaţiile de reuniune şi intersecţie sunt definite de obicei pe mulţimea tuturor submulţimilor (părţilor) unei mulţimi S, care se notează cu $\mathcal{P}(S)$.

Operaţiile de reuniune şi intersecţie au următoarele proprietăţi:
- asociativitate:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad \textit{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad \textit{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

- comutativitate:

$$A \cup B = B \cup A \qquad \textit{oricare ar fi } A, B \in \mathcal{P}(S)$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad \textit{oricare ar fi } A, B \in \mathcal{P}(S)$$

- intersecţia este distributivă faţă de reuniune:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \textit{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

- reuniunea este distributivă faţă de intersecţie:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \textit{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

- pentru orice $A \in \mathcal{P}(S)$ există un singur $B \in \mathcal{P}(S)$ astfel încât să avem $A \cup B = S$ şi $A \cap B = \emptyset$. Mulţimea B este mulţimea $\mathcal{C}_S A$.
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(S)$ avem $A \cup S = S$ şi $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(S)$ avem:

$$C_S(A \cup B) = C_S A \cap C_S B$$

$$C_S(A \cap B) = C_S A \cup C_S B$$

Aceste egalităţi se numesc legile lui De Morgan.

Definiţia 3.4. *Oricare ar fi mulţimile A şi B produsul cartezian $A \times B$ este mulţimea de perechi ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$.*

$$A \times B = \{(a, b) |\, a \in A, b \in B\}.$$

Produsul cartezian este distributiv faţă de reuniune şi intersecţie:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \qquad \textit{oricare ar fi } A, B, C$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \qquad \textit{oricare ar fi } A, B, C$$

4 Relaţii binare.

Definiţia 4.1. *O relaţie binară în (sau pe) mulţimea A este o submulţime R a produsului cartezian $A \times A$: $R \subset A \times A$.*

Prin tradiţie apartenenţa $(x, y) \in R$ se notează cu xRy.
Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ este o relaţie binară în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.2. *O relaţie binară R în mulţimea A este reflexivă dacă pentru orice $x \in A$ avem xRx.*

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$ este o relaţie binară reflexivă în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.3. *O relaţie binară R în mulţimea A este simetrică dacă*

$$xRy \Rightarrow yRx \quad \text{pentru orice } x, y \in A$$

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ este o relaţie binară simetrică în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.4. *O relaţie binară R în mulţimea A este antisimetrică dacă*

$$xRy \text{ şi } yRx \Rightarrow x = y \quad \text{pentru orice } x, y \in A$$

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$ este o relaţie binară antisimetrică în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.5. *O relaţie binară R în mulţimea A este tranzitivă dacă:*

$$xRy \text{ şi } yRz \Rightarrow xRz \quad \text{pentru orice } x, y, z \in A.$$

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$ este o relaţie binară tranzitivă în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.6. *O relaţie binară R în mulţimea A este totală dacă pentru orice $x, y \in A$ este adevărată cel puţin una dintre următoarele două afirmaţii: xRy, yRx.*

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$ este o relaţie binară totală în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.7. *O relaţie binară R în mulţimea A este parţială dacă există $x, y \in A$ astfel încât nici una din următoarele două aserţiuni nu este adevărată: xRy, yRx.*

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ este o relaţie binară parţială în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.8. *O relaţie binară R în mulţimea A este o relaţie de ordine parţială dacă are următoarele proprietăţi: R este relaţie parţială; R este reflexivă; R este antisimetrică; R este tranzitivă.*

Relaţia de incluziune a mulţimilor este o relaţie de ordine parţială în mulţimea părţilor unei mulţimi.

Definiţia 4.9. *O relaţie binară R în mulţimea A este relaţie de ordine totală dacă are următoarele proprietăţi: R este relaţie totală; R este reflexivă; R este antisimetrică; R este tranzitivă.*

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$ este o relaţie binară de ordine totală în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale.

Definiţia 4.10. *O mulţime A împreună cu o relaţie de ordine parţială în A se numeşte sistem parţial ordonat şi se notează cu (A, R).*

Mulţimea părţilor unei mulţimi X împreună cu relaţia de incluziune este un sistem parţial ordonat.

Definiţia 4.11. *O mulţime A împreună cu o relaţie de ordine totală R în A se numeşte sistem total ordonat şi se notează tot cu (A, R).*

Mulţimea numerelor reale împreună cu relaţia $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$ este un sistem total ordonat.

Definiţia 4.12. *Fie (A, R) un sistem parţial ordonat şi A' o submulţime a lui $A : A' \subset A$. Un element $a \in A$ este majorant pentru mulţimea A' dacă a verifică $a'Ra$ oricare ar fi $a' \in A'$. Un majorant a^* pentru A' este margine superioară pentru A' dacă a^* verifică a^*Ra pentru orice majorant a al lui A'. Marginea superioară a lui A' dacă există se notează cu $\sup A'$.*

Definiţia 4.13. *Fie (A, R) un sistem parţial ordonat şi A' o submulţime a lui $A : A' \subset A$. Un element $a \in A$ este minorant pentru mulţimea A' dacă a verifică aRa' pentru orice $a' \in A'$. Un minorant a_* pentru A' este margine inferioară pentru A' dacă a_* verifică aRa_* pentru orice minorant a al lui A'. Marginea inferioară a lui A' dacă există se notează cu $\inf A'$.*

Definiţia 4.14. *Fie (A, R) un sistem parţial ordonat. Un element $a \in A$ este maximal dacă pentru orice $a' \in A$ cu proprietatea aRa' rezultă $a'Ra$.*

Remarca 4.1. *Familia $P(X)$ a părţilor unei mulţimi X cu relaţia de incluziune $R = " \subset "$ este un exemplu bun pentru ilustrarea acestor concepte. Sistemul parţial ordonat este $(P(X); \subset)$. Un majorant al unei mulţimi $\mathcal{B} \subset P(X)$ este orice submulţime a mulţimii X care conţine mulţimea $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$, iar mulţimea $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ este marginea superioară a mulţimii $\mathcal{B}$. Analog, mulţimea $\bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ este marginea inferioară a mulţimii $\mathcal{B}$. Singurul element maximal în mulţimea $P(X)$ este mulţimea X.*

Definiţia 4.15. *O relaţie R în mulţimea A este relaţie de echivalenţă dacă are următoarele proprietăţi: R este reflexivă, R este simetrică şi R este tranzitivă. Un exemplu de relaţie de echivalenţă este egalitatea în mulţimea părţilor $P(X)$ ale unei mulţimi X.*

Mulţimea $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ divizibil cu } 5\}$ este o relaţie de echivalenţă în mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi.

Definiţia 4.16. *O relaţie R între elementele unei mulţimi A şi elementele unei mulţimi B este o submulţime a produsului cartezian $A \times B; R \subset A \times B$.*

Prin tradiţie dacă $(x, y) \in R$ se notează cu xRy.

Definiţia 4.17. *O funcţie f definită pe o mulţime A şi cu valori în mulţimea B este o relaţie R între elementele mulţimii A şi elementele lui $B\,(R \subset A \times B)$ care are următoarele proprietăţi:*

a) pentru orice $x \in A$, există $y \in B$ astfel încât xRy.

b) dacă pentru $x \in A$ şi $y_1, y_2 \in B$ avem xRy_1 şi xRy_2, atunci $y_1 = y_2$.

Prin tradiţie, o funcţie f definită pe mulţimea A şi cu valori în mulţimea B se notează cu $f : A \to B$.

5 Funcţii.

Noţiunea de funcţie joacă un rol important în matematică. Nu este o noţiune fundamentală pentru că aşa cum am văzut poate fi definită folosind noţiunea de mulţime (o relaţie binară cu anumite proprietăţi). Cu toate acestea pentru cei care abia încep să studieze analiza matematică este mai uşor să considere noţiunea de funcţie drept noţiune fundamentală clarificând semnificaţia ei prin exemple şi descriind-o de o manieră satisfăcătoare (pentru sensul comun).
Descrierea 5.1. Dacă la fiecare element x al unei mulţimi $A\,(x \in A)$ am pus în corespondenţă (am asociat) un element y dintr-o mulţime $B\,(y \in B)$ pe baza unei reguli, atunci zicem că am definit o funcţie (corespondenţă, aplicaţie) f pe mulţimea A cu valori în mulţimea B şi o notăm cu $f : A \to B$. Astfel o funcţie este determinată de mulţimile A şi B, precum şi de regula de corespondenţă (legea) care asociază unui element $x \in A$ un element $y \in B$.
De ce **Descrierea 5.1.** a funcţiei nu este o definiţie? Ce-i lipseşte?
Descrierea 5.1. foloseşte noţiunile de corespondenţă şi regulă care nu au fost definite în prealabil şi de aceea **Descrierea 5.1.** nu este o definiţie. Desigur intuitiv este clar ce este o regulă şi ce este o corespondenţă. În cazuri simple, aceste noţiuni nu conduc la confuzii şi sunt suficient de clare pentru a conferii noţiunii de funcţie calitate de noţiune fundamentală. Altfel spus şi noţiunea de funcţie poate fi considerată noţiune fundamentală. Trebuie însă să reţinem că acest lucru nu este necesar pentru că funcţia poate fi definită cu ajutorul noţiunii de mulţime.
Este de asemenea important de reţinut că în cazul în care funcţia $f : A \to B$ este gândită ca noţiune fundamentală descrisă de 5.1., atunci regula prin care unui element $x \in A$ se

asociază un element $y \in B$ este aplicabilă fiecărui element x din mulţimea A. Elementul $x \in A$ se numeşte argumentul funcţiei, iar elementul $y \in B$ ce corespunde lui x se numeşte valoarea funcţiei şi se notează $y = f(x)$. Într-o asemenea notaţie şi viziune funcţia f apare ca o regulă care transformă fiecare element $x \in A$ într-un element $y = f(x) \in B$. De aceea funcţia se numeşte adesea şi transformare.
Mulţimea A se numeşte domeniul de definiţie al funcţiei f şi mulţimea elementelor $y \in B$ pentru care există $x \in A$ astfel ca $y = f(x)$, se numeşte domeniul de valori al funcţiei f. Acesta se notează de obicei cu $f(A)$:

$$f(A) = \left\{ y \in B \;\middle|\; \text{există } x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y \right\}$$

şi se numeşte adesea imaginea mulţimii A prin funcţia f.
Adesea va trebui să considerăm funcţii care asociază la fiecare număr real x dintr-o submulţime A a mulţimii numerelor reale; $x \in A \subset \mathbb{R}$; un număr real $= f(x) \in \mathbb{R}^1$. Acest gen de funcţii se numesc funcţii reale de o variabilă reală şi în cazul unora regula de corespondenţă este dată de o expresie algebrică explicită. De exemplu:

$$y = x^2 + 2x; \; y = \frac{1 - x}{\sqrt{x} + 2}; \; y = \sqrt[5]{1 + \sqrt[7]{x}}$$

Membrii drepţi ai acestor egalităţi reprezintă regula după care x se transformă în y. Regula în primul caz este: fiecare x se ridică la pătrat şi apoi se adaugă dublul lui x. Regulile în cel de-al doilea şi cel de-al treilea caz pot fi formulate în mod asemănator. Regula poate fi formulată şi cu ajutorul funcţiilor elementare $\exp, \log_a, \sin, \cos, \mathrm{tg}, ctg, arctg, etc$ în combinaţie cu operaţii algebrice. De exemplu:

$$y = \log_2 \sqrt{1 + \sin x}; \; y = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg} x} - 2^x}.$$

Membrii drepţi ai acestor egalităţi arată regula după care x se transformă în y.
O altă metodă, utilizată frecvent, pentru a defini o regulă este următoarea: se consideră două funcţii f_1 şi f_2 definite printr-o expresie ca cele prezentate mai sus şi un număr a, după care se scrie:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{pentru } x < a \\ f_2(x) & \text{pentru } x \geq a \end{cases}$$

Egalitatea aceasta se interpretează ca o regulă care la un număr x mai mic decât a face să corespundă un număr y după regula f_1 şi la un număr x mai mare sau egal cu a face să corespundă un număr y după regula f_2.

6 Funcţia compusă. Inversa unei funcţii.

Definiţia 6.1. *Fie $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$ două funcţii. Pentru orice $x \in X$ elementul $g(f(x))$ aparţine mulţimii Z. Corespondenţa:*

$$x \longmapsto g(f(x))$$

defineşte o funcţie pe mulţimea X cu valori în mulţimea Z, care se notează cu $g \circ f : X \to Z$ şi se numeşte compusa funcţiilor g şi f.

Comentariu: Regula după care elementului $x \in X$ i se asociază elementul $g(f(x))$ se formulează în cuvinte astfel: prima oară se aplică f elementului x şi se obţine elementul $f(x) \in Y$, după aceea se aplică funcţia g elementului $f(x)$ şi se obţine elementul $g(f(x))$ din mulţimea Z. De exemplu:

$$f(x) = \sin x\,;\ g(y) = y^2 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin^2 x$$

$$f(x) = x^2\,;\ g(y) = \operatorname{tg} y \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \operatorname{tg} x^2$$

$$f(x) = \frac{x}{2}\,;\ g(y) = \cos y \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos \frac{x}{2}$$

Definiţia 6.2. *Funcţia $f : X \to Y$ este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definiţia 6.3. *Funcţia $f : X \to Y$ este surjectivă dacă pentru orice $y \in Y$ există $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$.*

Definiţia 6.4. *Funcţia $f : X \to Y$ este bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă.*

Comentariu:

1. O funcţie injectivă $f : X \to Y$ are următoarea proprietate: dacă $f(x_1) = f(x_2)$ atunci $x_1 = x_2$.
   Funcţiile numerice: $y = 5x$; $y = e^x$; $y = arctg\, x$ sunt injective.

2. O funcţie surjectivă $f : X \to Y$ se numeşte funcţie cu valori pe Y. Dacă funcţia definită pe X este cu valori pe Y atunci pentru orice $y \in Y$ ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o soluţie în X. Funcţia numerică $y = \sin x$ este o funcţie definită pe mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale şi cu valori pe segmentul închis $[-1, 1]$ şi nu este o funcţie surjectivă pe mulţimea $\mathbb{R}^1$ a tuturor numerelor reale. (Ecuaţia $\sin x = 2$ nu are soluţie).

3. O funcţie bijectivă $f : X \to Y$ este o corespondenţă unu la unu. Aceasta înseamnă că: orice $x \in X$ are un corespondent $y \in Y$, $y = f(x)$ şi la diferiţi x corespund y diferiţi; pentru orice $y \in Y$ există $x \in X$ astfel ca $y = f(x)$ şi pentru diferiţi x, elementele y sunt diferite.

Definiţia 6.5. *Fie $f : X \to Y$ o funcţie bijectivă. Pentru orice $y \in Y$ există un $x \in X$, unic! astfel ca $f(x) = y$. Corespondenţa $y \longmapsto$ "acel x pentru care $f(x) = y$" defineşte o funcţie pe mulţimea Y cu valori pe mulţimea X, care se numeşte inversa funcţiei f şi se notează cu f^{-1}; $f^{-1} : Y \to X$.*

Comentariu:

1. Regula de corespondenţă din definiţia 6.5 implică următoarea proprietate a funcţiei inverse:
$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ pentru orice } y \in Y$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ pentru orice } x \in X$$

2. Funcţiile f şi f^{-1} sunt mutual inverse; adică:
$$(f^{-1})^{-1} = f$$

3. Pentru a găsi inversa unei funcţii numerice $y = f(x)$ (dacă f este bijectivă) trebuie să exprimăm x în funcţie de y. Astfel de exemplu: dacă $y = 3x + 2$ funcţia inversă este $x = \dfrac{y-2}{3}$; dacă $y = x^3$ funcţia inversă este: $x = \sqrt[3]{y}$.

7 Simboluri logice.

În matematică se folosesc frecvent următoarele expresii: "pentru orice element" şi "există". Aceste expresii sunt notate cu simboluri speciale.
Expresia: "pentru orice element" se notează cu simbolul $\forall$ care se obţine prin inversarea literei A; prima literă din cuvântul "Any".
Expresia "există" se notează cu simbolul $\exists$ care este imaginea în oglindă a literei E; prima literă din cuvântul "Exist".
Se foloseşte de asemenea simbolul $\Rightarrow$ cu semnificaţia "rezultă". Dacă A şi B sunt două afirmaţii atunci $A \Rightarrow B$ înseamnă că din A rezultă B.
Dacă $A \Rightarrow B$ şi $B \Rightarrow A$ atunci afirmaţiile A şi B sunt echivalente şi aceasta se notează cu $A \Leftrightarrow B$. $A \Leftrightarrow B$ înseamnă că afirmaţia A este adevărată dacă şi numai dacă B este adevărată.
Folosind aceste notaţii injectivitatea unei funcţii $f : X \to Y$ poate fi scrisă sub forma:
$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$$
iar surjectivitatea aceleaşi funcţii sub forma:
$$\forall\, y \in Y \ \ \exists\, x \in X \ \mid \ f(x) = y.$$
Linia verticală inaintea egalităţii $f(x) = y$ se citeşte "astfel încât".
Notaţia $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} B$ se foloseşte când vrem să definim o noţiune A folosind o afirmaţie B. Ea se citeşte: "prin definiţie A este B". Astfel de exemplu notaţia:
$$X \subset Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{(\forall x)(x \in X) \Rightarrow (x \in Y)\}$$
defineşte X ca submulţime a mulţimii Y. Partea dreaptă a notaţiei se citeşte astfel: "orice element x din X este element al mulţimii Y".

8 Afirmaţia contrară, teorema contrară şi teorema reciprocă.

Definiţia 8.1. *Oricare ar fi afirmaţia A, notăm cu $\bar{A}$ afirmaţia: ”afirmaţia A este falsă”. Afirmaţia $\bar{A}$ se numeşte afirmaţia contrară.*

Exemplu 8.1. Dacă A este afirmaţia: ”7 este un număr impar” atunci $\bar{A}$ este afirmaţia: ”7 nu este un număr impar”. Dacă A este afirmaţia: ”mâine va ploua” atunci afirmaţia $\bar{A}$ va fi: ”mâine nu va ploua”. Dacă A este afirmaţia: ”toate rachetele vor atinge ţinta”, atunci $\bar{A}$ este afirmaţia: ”cel puţin o rachetă nu va atinge ţinta”.

Definiţia 8.2. *Pentru teorema ”dacă A atunci B” afirmaţia ”dacă $\bar{A}$ atunci $\bar{B}$” se numeşte teoremă contrară. Teorema contrară a teoremei contrare este teorema iniţială.*

Exemplu 8.2. A=”suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater este egală cu 180^o”, B=”patrulaterul este inscriptibil”, $\bar{A}$=”suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater nu este egală cu 180^o”, $\bar{B}$=”patrulaterul nu este inscriptibil”

Teorema ”dacă A atunci B” se formulează astfel: ”dacă suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater este egal cu 180^o atunci patrulaterul este inscriptibil”. Teorema contrară: ”dacă $\bar{A}$ atunci $\bar{B}$” se formulează astfel: ”dacă suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater nu este egală cu 180^o atunci patrulaterul nu este inscriptibil”
În acest exemplu ambele teoreme: cea directă şi cea contrară sunt adevărate.

Definiţia 8.3. *Pentru orice afirmaţie în matematică (teoremele inclusiv) care au forma $A \Rightarrow B$ se poate construi o nouă afirmaţie permutând A şi B. Astfel se obţine afirmaţia $B \Rightarrow A$ care se numeşte afirmaţie reciprocă sau teoremă reciprocă. Mai exact teorema $B \Rightarrow A$ este reciproca teoremei $A \Rightarrow B$. Reciproca teoremei reciproce este teorema iniţială. De aceea teoremele $A \Rightarrow B$ şi $B \Rightarrow A$ se zic mutual reciproce.*

Dacă teorema directă $A \Rightarrow B$ este adevărată, reciproca ei $B \Rightarrow A$ poate fi adevărată sau falsă.

Exemplu 8.3. Teorema directă (teorema lui Pitagora) este: ”dacă triunghiul este dreptunghic atunci pătratul laturii celei mai mari a triunghiului este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi”. Teorema reciprocă este: ”dacă pătratul laturii celei mai mari a triunghiului este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi atunci triunghiul este dreptunghic”.

În acest exemplu atât teorema directă cât şi cea reciprocă sunt adevărate.

Exemplu 8.4. Teorema directă: ”dacă două unghiuri sunt drepte atunci cele două unghiuri sunt egale”. Teorema reciprocă: ”dacă două unghiuri sunt egale atunci cele două unghiuri sunt drepte”.

În acest exemplu teorema directă este adevărată, iar teorema reciprocă este falsă.

Teorema reciprocă este echivalentă cu teorema contrară. Aceasta înseamnă că teorema reciprocă este adevărată dacă şi numai dacă teorema contrară este adevărată.

9 Condiţie necesară şi condiţie suficientă.

Definiţia 9.1. *Dacă teorema $A \Rightarrow B$ este adevărată atunci: condiţia A este suficientă pentru B şi condiţia B este necesară pentru A.*
Dacă teorema reciprocă $B \Rightarrow A$ este adevărată atunci: condiţia B este suficientă pentru A şi condiţia A este necesară pentru B.

Definiţia 9.2. *Dacă teorema directă $A \Rightarrow B$ şi teorema reciprocă $B \Rightarrow A$ sunt adevărate atunci : condiţia A este necesară şi suficientă pentru B şi condiţia B este necesară şi suficientă pentru A. Cu alte cuvinte condiţiile A şi B sunt echivalente. A este adevărată dacă şi numai dacă B este adevărată.*

Exemplu 9.1. Teorema lui Bézout este: "Dacă α este o rădăcină a polinomului $P(x)$ atunci polinomul $P(x)$ este divizibil cu $x - \alpha$".
Reciproca teoremei lui Bézout este: "Dacă polinomul $P(x)$ este divizibil cu $x - \alpha$ atunci α este o rădăcină a polinomului $P(x)$."

Ştim că atât teorema lui Bézout cât şi reciproca ei sunt adevărate. Rezultă de aici că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca "numărul α să fie rădăcină a polinomului $P(x)$" este ca "polinomul $P(x)$ să fie divizibil cu $x - \alpha$". Prin urmare, este adevărată teorema: "polinomul $P(x)$ este divizibil cu $x - \alpha$ dacă şi numai dacă α este rădăcină a polinomului $P(x)$".

Partea II

Calcul diferenţial şi integral pentru funcţii reale de o variabilă reală

10 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^1$.

Definiţia 10.1. *O vecinătate a punctului $x \in \mathbb{R}^1$ este o mulţime $V \subset \mathbb{R}^1$ care conţine un interval deschis $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ ce conţine pe x: adică $x \in (a, b) \subset V$.*

Orice interval deschis care conţine pe x este vecinătate pentru x. Un interval deschis este vecinătate pentru orice x ce aparţine intervalului.

Definiţia 10.2. *Un punct $x \in \mathbb{R}^1$ este punct interior al mulţimii $A \subset \mathbb{R}^1$ dacă există un interval deschis (a, b) astfel încât $x \in (a, b) \subset A$.*

Un punct x al intervalului (a, b) este un punct interior al mulţimii (a, b).

Definiţia 10.3. *Interiorul unei mulţimi $A \subset \mathbb{R}^1$ este mulţimea punctelor interioare ale lui A.*

Tradiţional interiorul mulţimii A se notează cu $Int(A)$ sau cu $\mathring{A}$. Dacă $A = (a, b)$, atunci $\mathring{A} = (a, b) = A$.

Definiţia 10.4. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^1$ este deschisă dacă $A = \mathring{A}$.*

Orice interval deschis este o mulţime deschisă. Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^1$ este deschisă, dacă şi numai dacă fiecare punct al ei este în mulţime cu o întregă vecinătate.
Reuniunea unei familii de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.
Intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este mulţime deschisă.
Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}^1$ şi mulţimea vidă $\emptyset$ sunt mulţimi deschise.

Definiţia 10.5. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^1$ este închisă dacă complementara ei $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^1}A$ este deschisă.*

Orice interval închis $[a, b]$ este o mulţime închisă.
Intersecţia unei familii de mulţimi închise este închisă.
Reuniunea unui număr finit de mulţimi închise este o mulţime închisă.
Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}^1$ şi mulţimea vidă $\emptyset$ sunt mulţimi închise.

Definiţia 10.6. *Punctul $x \in \mathbb{R}^1$ este punct limită sau punct de acumulare al mulţimii $A \subset \mathbb{R}^1$, dacă orice vecinătate V a lui x conţine cel puţin un punct y din A care este diferit de x; $y \neq x$ şi $y \in V \bigcap A$.*

Definiţia 10.7. *Închiderea $\bar{A}$ a mulţimii $A \subset \mathbb{R}^1$ este intersecţia tuturor mulţimilor închise care conţin mulţimea A.*

Închiderea unei mulţimi A are următoarele proprietăţi:
$\bar{A} \supset A$; $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$; $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
$\bar{A} = A$ dacă şi numai dacă A este mulţime închisă.
$x \in \bar{A}$ dacă şi numai dacă orice vecinătate V a lui x intersectează mulţimea A ($V \cap A \neq \emptyset$).

Definiţia 10.8. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^1$ este mărginită dacă există $m, M \in \mathbb{R}^1$ astfel încât $m \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$.*

Definiţia 10.9. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^1$ este compactă dacă este mărginită şi închisă.*

Orice interval închis $[a, b]$ este mulţime compactă.

11 Şiruri de numere reale.

Definiţia 11.1. *O funcţie definită pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ şi cu valori în mulţimea $\mathbb{R}^1$ a numerelor reale se numeşte şir de numere reale.*

Comentariu: Valoarea funcţiei, care defineşte şirul de numere reale, în 1 se notează cu a_1, valoarea în 2 se notează cu a_2, ... , valoarea în n cu a_n, ...
Tradiţional a_1 se numeşte primul termen al şirului, a_2 cel de-al doilea termen al şirului, ... ,a_n cel de-al n-lea termen al şirului sau termenul general.
Şirul $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ se notează tradiţional cu (a_n). Pentru a defini un şir trebuie să definim toţi termenii şirului. Altfel spus trebuie dată o regulă care permite determinarea fiecărui termen al şirului.

Exemplu 11.1.

$$\begin{array}{llllll}
a_n = q^{n-1},\ q \neq 0; & a_1 = 1; & a_2 = q; & a_3 = q^2; & \ldots\ a_n = q^{n-1}; & \ldots \\
a_n = \dfrac{1}{n}; & a_1 = 1; & a_2 = \dfrac{1}{2}; & a_3 = \dfrac{1}{3}; & \ldots\ a_n = \dfrac{1}{n}; & \ldots \\
a_n = n^2; & a_1 = 1; & a_2 = 4; & a_3 = 9; & \ldots\ a_n = n^2; & \ldots \\
a_n = (-1)^n; & a_1 = -1; & a_2 = 1; & a_3 = -1; & \ldots\ a_n = (-1)^n; & \ldots \\
a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}; & a_1 = 0; & a_2 = 1; & a_3 = 0; & \ldots\ a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}; & \ldots
\end{array}$$

Se poate întâmpla ca atunci când n creşte şi a_n creşte.

Definiţia 11.2. *Şirul (a_n) este crescător dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $a_n \leq a_{n+1}$.*

Definiţia 11.3. *Un şir (a_n) este descrescător dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $a_{n+1} \leq a_n$.*

Definiţia 11.4. *Un şir (a_n) este monoton dacă este crescător sau este descrescător.*

Exemplu 11.2. Dacă $q > 1$ atunci şirul $a_n = q^n$ este crescător, iar dacă $q \in (0, 1)$ atunci şirul $a_n = q^n$ este descrescător. Dacă $q \in (0, \infty)$ şi $q \neq 1$ atunci şirul $a_n = q^n$ este monoton

Definiţia 11.5. *Un şir* (a_n) *este mărginit dacă există un număr* $M > 0$ *astfel încât pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *are loc inegalitatea* $|a_n| \leq M$*.*

Dacă $q \in (0, 1)$ atunci şirul $a_n = q^n$ este mărginit ($|a_n| < 1$). Şirul $a_n = (-1)^n$ este mărginit ($|a_n| \leq 1$).

Definiţia 11.6. *Un şir* (a_n) *este nemărginit dacă nu este mărginit. Altfel spus, pentru orice* $M > 0$ *există* $n_M \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|a_{n_M}| > M$*.*

Dacă $q > 1$ atunci şirul $a_n = q^n$ este nemărginit.

Definiţia 11.7. *Un subşir al şirului* (a_n) *este un şir de forma* (a_{n_k}) *unde* $(n_k) = n_1, n_2, ...$ *este un şir strict crescător de numere naturale.*

Comentariu:
Orice subşir al unui şir crescător este şir crescător.
Orice subşir al unui şir descrescător este şir descrescător.
Orice subşir al unui şir mărginit este şir mărginit.

12 Convergenţa şirurilor de numere reale.

Se poate întâmpla ca dacă n creşte termenii a_n ai şirului (a_n) să se apropie de un număr L. În acest caz ajungem la o noţiune matematică importantă, acea de convergenţă a unui şir la un număr.

Definiţia 12.1. *Şirul de numere reale* (a_n) *converge la numărul real* L *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $N = N(\varepsilon)$ *astfel ca toţi termenii de rang* $n > N(\varepsilon)$ *ai şirului să verifice inegalitatea:*

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Faptul că şirul (a_n) converge la numărul L se notează pe scurt cu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ şi se exprimă prin cuvintele: "pentru n tinzând la infinit limita lui (a_n) este egală cu L" sau $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ şi se exprimă prin cuvintele "pentru n tinzând la infinit a_n tinde la L".
În cazul $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ se mai spune (a_n) converge la L.

Comentariu: Dacă şirul (a_n) converge la L, atunci orice subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) converge la L. Aceasta întrucât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $|a_n - L| < \varepsilon$. De aici rezultă că pentru orice $n_k > N$ avem $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$.

Nu orice şir este convergent. De exemplu, şirul $a_n = (-1)^n$ nu converge. Aceasta întrucât subşirul $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ converge la 1 şi subşirul $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ converge la -1.

Limita unui şir convergent este unică.
Afirmaţia contrară ar însemna că şirul (a_n) converge la L_1 şi L_2 cu $L_1 \neq L_2$. Rezultă de aici că există N_1 şi N_2 astfel încât $|a_n - L_1| < \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$ pentru orice $n > N_1$

şi $|a_n - L_2| < \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$ pentru orice $n > N_2$. De aici rezultă că pentru orice $n > \max\{N_1, N_2\}$ avem: $|L_1 - L_2| \le |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n| < |L_1 - L_2|$ ceea ce este absurd.

Dacă un şir (a_n) converge la L, atunci este mărginit. Aceasta întrucât există $N(1)$ astfel că pentru orice $n > N(1)$ să avem: $|a_n - L| < 1$ şi astfel $|a_n| = |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$ pentru orice $n > N(1)$. Rezultă în continuare că pentru orice n are loc inegalitatea:

$$|a_n| \le \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N(1)}|, 1 + |L|\}$$

Exemplu 12.1. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Considerăm $\varepsilon > 0$ şi condiţia:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$$

Rezultă de aici inegalitatea $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ sau $\dfrac{1}{n} < \varepsilon^2$ echivalent cu $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
Punem $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$, unde $\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$ este partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$. Este evident că dacă $n > N(\varepsilon)$ atunci $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ şi inegalitatea $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$ este satisfăcută.

În acest exemplu am demonstrat convergenţa la zero folosind definiţia convergenţei.
În următoarea secţiune vom stabili reguli care permit verificarea convergenţei şi calcularea limitei de o manieră mult mai simplă.
În anumite cazuri se spune că şirul (a_n) converge (tinde) la infinit. Sensul acestei noţiuni este precizat în următoarele definiţii:

Definiţia 12.2. *Şirul (a_n) tinde la $+\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există $N(M)$ astfel încât $a_n > M$ oricare ar fi $n > N(M)$.*

Şirul $a_n = n^2$ tinde la $+\infty$ în sensul acestei definiţii.

Definiţia 12.3. *Şirul (a_n) tinde la $-\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există $N(M)$ astfel încât $a_n < -M$ pentru $n > N(M)$.*

Şirul $a_n = -n^2$ tinde la $-\infty$ în sensul acestei definiţii.

13 Reguli privind convergenţa şirurilor de numere reale.

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale convergente la numerele reale a şi respectiv b.

Regula sumei: *Şirul $(a_n + b_n)$ converge la numărul real $a + b$.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și $\varepsilon' = \dfrac{1}{2}\varepsilon$. Deoarece $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ și $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ există $N_1 = N_1(\varepsilon')$ astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon'$, $\forall n > N_1$ și există $N_2 = N_2(\varepsilon')$ astfel încât $|b_n - b| < \varepsilon'$, $\forall n > N_2$. Fie $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Pentru orice $n > N_3$ avem:

$$|a_n - b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' = \varepsilon$$

Aceasta demonstrează că $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$. □

Regula produsului: *Șirul* $(a_n \cdot b_n)$ *converge la numărul real* $a \cdot b$.

Demonstrație. Deoarece $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ există $M > 0$ astfel ca $|b_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |b_n \cdot (a_n - a) + a \cdot (b_n - b)| \leq$$

$$\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq M \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Fie $\varepsilon > 0$ și fie $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$.
Deoarece $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ există N_1 și N_2 astfel încât: $|a_n - a| < \varepsilon_1$, $\forall n > N_1$ și $|b_n - b| < \varepsilon_2$, $\forall n > N_2$.
Fie $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Pentru orice $n > N_3$ avem: $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon$. Altfel spus: $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot b$. □

Regula câtului: *Dacă* $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *și* $b \neq 0$ *atunci șirul* $\dfrac{a_n}{b_n}$ *converge la numărul real* $\dfrac{a}{b}$.

Demonstrație. Prima oară arătăm că $\dfrac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{b}$. Pentru aceasta evaluăm diferența: $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right|$ și găsim:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|}$$

Întrucât $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ există N_1 astfel încât să avem: $|b_n - b| < \dfrac{1}{2}|b|$ pentru orice $n > N_1$. Considerăm numărul $M = \max\left\{\dfrac{2}{|b|}, \dfrac{1}{|b_1|}, \ldots, \dfrac{1}{|b_{N_1}|}\right\}$ și remarcăm că are loc inegalitatea $\left|\dfrac{1}{b_n}\right| < M$ pentru orice n.
Fie acum $\varepsilon > 0$ și $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon \cdot |b|}{M}$. Pentru $\varepsilon' > 0$ există $N_2 = N_2(\varepsilon')$ astfel încât $|b_n - b| < \varepsilon'$ pentru orice $n > N_2$. De aici rezultă că $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| < \varepsilon$ pentru orice $n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$.
Cu alte cuvinte $\dfrac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{b}$. În virtutea regulii produsului rezultă: $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a}{b}$. □

Regula de înmulţire cu un număr: *Şirul* $(k \cdot a_n)$ *converge la numărul real* $k \cdot a$ *pentru orice număr real* k.
Regula de înmulţire cu un număr este un caz special al regulii produsului.

Aplicaţie 13.1 Determinaţi limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6} = ?$$

Soluţie: Regula câtului nu poate fi aplicată direct pentru că nici numărătorul nici numitorul fracţiei $\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6}$ nu converge la o limită finită.
Cu toate acestea dacă se dă factor comun n^2 şi la numărător şi la numitor şi fracţia se simplifică cu n^2 se obţine:

$$a_n = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}$$

Se arată uşor că $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi că şirul constant (k) converge la k. Aplicând acum regula sumei, a produsului şi a înmulţirii cu un număr rezultă următoarele convergenţe:

$$1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad 4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

Aplicând în continuare regula câtului obţinem următoarea convergenţă:

$$a_n = \frac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

Regula "cleştelui": *Fie* (a_n), (b_n), (c_n) *trei şiruri de numere reale care verifică inegalităţile:*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dacă şirurile (a_n) *şi* (c_n) *sunt convergente la aceeaşi limită* L *atunci şirul* (b_n) *converge la* L.

Demonstraţie. Deoarece $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avem: $a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L$, $\forall n$ şi deci:

$$|b_n - L| \leq \max\{|a_n - L|, |c_n - L|\}, \quad \forall n.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ există $N_1 = N_1(\varepsilon)$ şi $N_2 = N_2(\varepsilon)$ astfel încât să avem:

$$|a_n - L| < \varepsilon, \ \forall n > N_1(\varepsilon) \ \text{şi} \ |c_n - L| < \varepsilon, \ \forall n > N_2(\varepsilon)$$

Rezultă că avem:

$$|b_n - L| < \varepsilon, \ \forall n > N_3 = N_3(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}.$$

Cu alte cuvinte $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$. □

Aplicaţia 13.2. Arătaţi că $(-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Soluţie: Fie $a_n = -\dfrac{1}{n^2}$; $b_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^2}$; $c_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Întrucât $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $a_n \le b_n \le c_n$ rezultă (aplicând regula cleştelui) $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Regula de convergenţă a şirurilor monotone: *Dacă (a_n) este un şir monoton şi mărginit atunci este convergent la un număr real.*

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia pentru un şir crescător şi mărginit. Demonstraţia este similară pentru un şir descrescător şi mărginit.
Fie (a_n) un şir crescător şi mărginit şi fie $M_0 = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $a_N > M_0 - \varepsilon$.
Dacă $n > N$, atunci $a_n \ge a_N$ şi deci $a_n > M_0 - \varepsilon$. În plus $a_n \le M_0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Rezultă astfel că $|a_n - M| < \varepsilon$ pentru $n > N$. Aceasta demonstrează că $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M_0$. $\square$

Aplicaţie 13.3. Un şir (a_n) este definit astfel: $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ pentru $n \ge 1$.
Să se arate că: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Soluţie: Prima oară se arată, prin inducţie, că şirul (a_n) este crescător.
Deoarece $a_1 = 1$ şi $a_2 = \sqrt{2}$ avem: $a_1 \le a_2$. Calculăm acum diferenţa $a_{n+1} - a_n$ şi găsim:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a_{n-1} + 1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}}$$

Întrucât suma $\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}$ este pozitivă dacă $a_{n-1} \le a_n$, atunci $a_n \le a_{n+1}$. Astfel rezultă prin inducţie că şirul (a_n) este crescător.
Din relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ prin ridicare la pătrat se obţine egalitatea:

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - a_n - 1 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

şi deoarece şirul (a_n) este crescător avem: $(a_n - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} \le 0$. Din această inegalitate rezultă imediat că şirul (a_n) este mărginit superior de numărul $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cu regula de convergenţă a şirurilor monotone deducem că şirul (a_n) este convergent. Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Deoarece $a_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ obţinem că $L = \sqrt{L+1}$ şi astfel $L^2 = L + 1$. Ecuaţia de gradul al doilea $L^2 = L + 1$ are două rădăcini: $\dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Întrucât $a_n \ge 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rădăcina pozitivă este limita. Adică $L = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Teorema 13.1. Teorema lui Weierstrass-Bolzano *Dacă şirul de numere reale (a_n) este mărginit atunci conţine un subşir convergent la un număr real.*

Demonstraţie. Fie $S_N = \{a_n | n > N\}$.
Dacă fiecare mulţime S_N are un cel mai mare element, atunci considerăm următorul subşir al şirului (a_n):

$$b_1 = a_{n_1} = \max S_1;\ b_2 = a_{n_2} = \max S_{n_1};\ b_3 = a_{n_3} = \max S_{n_2}; \dots$$

Şirul (b_n) este un subşir al şirului (a_n) şi este descrescător. Deoarece (a_n) este mărginit, şirul (b_n) este şi el mărginit. Rezultă astfel că şirul (b_n) este convergent. Dacă pentru un M, S_M nu are un cel mai mare element atunci pentru orice a_m cu $m > M$ există a_n cu $n > m$ şi $a_n > a_m$. Fie $c_1 = a_{M+1}$ şi c_2 primul termen al şirului a_n după $c_1 = a_{M+1}$ care are proprietatea $c_2 > c_1$. În continuare fie c_3 primul termen al şirului (a_n) după c_2 care verifică $c_3 > c_2$ şi aşa mai departe. Se obţine în acest fel un subşir (c_n) al şirului (a_n); care este monoton crescător. Deoarece (c_n) este mărginit este convergent. □

Intuitiv este clar că dacă $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ atunci termenii şirului care au rang mare diferă puţin de L şi deci şi unul de celălalt. Mai exact avem:

Teorema 13.2. Criteriul Cauchy de convergenţă al unui şir de numere reale. *Un şir (a_n) de numere reale este convergent la un număr real dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât avem:*

$$|a_p - a_q| < \varepsilon, \ \ \forall p, q > N(\varepsilon)$$

Demonstraţie. Presupunem că şirul (a_n) converge la numărul L şi considerăm un număr $\varepsilon > 0$. Există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $|a_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Prin urmare: $|a_p - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ şi $|a_q - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall p, q > N(\varepsilon)$ şi rezultă că:

$$|a_p - a_q| \leq |a_p - L| + |a_q - L| < \varepsilon, \ \ \forall p, q > N(\varepsilon).$$

Presupunem acum că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $|a_p - a_q| < \varepsilon$, $\forall p, q > N(\varepsilon)$. Pentru $\varepsilon = 1$ şi $N_1 = N(1)$ ales astfel încât $|a_p - a_q| < 1$, $\forall p, q > N_1$, avem:

$$|a_n| = |a_n - a_{N_1+1} + a_{N_1+1}| \leq |a_n - a_{N_1+1}| + |a_{N_1+1}| \leq 1 + |a_{N_1+1}|, \ \ \forall n \geq N_1 + 1$$

şi deci:

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|, |a_{N_1+1}| + 1\} = M, \ \ \forall n$$

Cu alte cuvinte şirul (a_n) este mărginit.
Conform teoremei lui Weierstrass-Bolzano şirul (a_n) conţine un subşir (a_{n_k}) convergent. Fie $L = \lim\limits_{n_k\to\infty} a_{n_k}$ şi ε un număr real pozitiv $\varepsilon > 0$. Există $N_1 = N_1(\varepsilon)$ astfel încât $|a_{n_k} - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n_k > N_1$ şi există $N_2 = N_2(\varepsilon)$ astfel încât $|a_p - a_q| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall p, q > N_2$. De aici rezultă că pentru orice $n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ avem:

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

unde n_k este ales astfel încât $n_k > N_3$. □

14 Punct limită al unui şir de numere reale.

Definiţia 14.1. *Un punct $x \in \mathbb{R}^1$ este punct limită al şirului (a_n) dacă există un subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) care converge la x; $a_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{} x$.*

Definiţia 14.2. *Mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}^1$ care sunt puncte limită ale şirului (a_n) se notează cu $\mathcal{L}(a_n)$ şi se numeşte mulţimea punctelor limită sau pe scurt mulţimea limită a şirului (a_n).*

Şirul mărginit (a_n) converge la L ($a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$) dacă şi numai dacă $\mathcal{L}(a_n) = \{L\}$.

Definiţia 14.3. *Limita superioară a şirului (a_n) este marginea superioară a mulţimii $\mathcal{L}(a_n)$. Limita superioară a şirului (a_n) se notează tradiţional cu $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ sau cu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \sup \mathcal{L}(a_n)$.*

Definiţia 14.4. *Limita inferioară a şirului (a_n) este marginea inferioară a mulţimii $\mathcal{L}(a_n)$. Limita inferioară a şirului (a_n) se notează tradiţional cu $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ sau cu $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \inf \mathcal{L}(a_n)$.*

Şirul (a_n) converge dacă şi numai dacă are loc:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Exemplu 14.1. În cazul şirului $a_n = (-1)^n$ mulţimea punctelor limită $\mathcal{L}(a_n)$ este: $\mathcal{L}(a_n) = \{-1, 1\}$ şi:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -1; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1.$$

15 Serii de numere reale.

Fie (a_n) un şir de numere reale. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fixat, suma:

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

are sens.

Dacă şirul (s_n) converge la "s" atunci "s" poate fi numit în mod justificat suma "seriei infinite"

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Mai precis:

Definiţia 15.1. *O serie infinită de numere reale este un şir de numere reale (s_n) al cărui termen general s_n are forma $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ unde (a_n) este un şir de numere reale dat.*

În mod tradiţional o serie infinită se notează cu simbolul $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi a_n se numeşte prin tradiţie termenul general al seriei.

Tot prin tradiţie simbolul $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte serie iar şirul de numere reale (s_n) cu $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ se numeşte şirul sumelor parţiale ale seriei.

Definiţia 15.2. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şirul sumelor parţiale* (s_n) *este convergent. Limita şirului* (s_n) : $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *se numeşte suma seriei şi se notează cu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Definiţia 15.3. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă dacă şirul sumelor parţiale* (s_n) *este divergent.*

Exemplu 15.1. Să se verifice că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Soluţie: Şirul sumelor parţiale al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Deoarece $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Exemplu 15.2. Să se verifice că seria $\sum_{n=1}^{\infty} n$ este divergentă.

Soluţie: Şirul sumelor parţiale al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} n$ este $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$. Deoarece şirul (s_n) este divergent seria $\sum_{n=1}^{\infty} n$ este divergentă.

Exemplu 15.3. Să se verifice că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ este convergentă şi suma ei este egală cu 1.

Soluţie: Întrucât:

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

termenul general al şirului sumelor parţiale este:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

şi deci $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Comentariu: Exemplul 15.1 este un caz particular de serie geometrică având forma $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$, în care x este un număr real. Remarcăm că aici însumarea începe cu $n = 0$ şi nu cu $n = 1$. Pentru o serie geometrică suma primilor n termeni este:

$$s_n = a + ax + ax^2 + ... + ax^{n-1}$$

Un calcul standard arată că

$$s_n = \frac{a(1-x^n)}{1-x} \quad \text{pentru} \forall\ x \neq 1.$$

De aici $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{a}{1-x}\quad \forall\ |x| < 1.$

Deoarece şirul (s_n) este divergent pentru $|x| \geq 1$ obţinem următorul rezultat:

Seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ... + ax^n + ...\ ,\ a \neq 0$ *converge dacă şi numai dacă* $|x| < 1$. *Mai mult suma seriei este* $\dfrac{a}{1-x}$.

Deoarece suma unei serii convergente este definită ca limita şirului sumelor parţiale al seriei, rezultatele privind convergenţa şirurilor de numere reale pot fi folosite pentru a stabili convergenţa seriilor.

Urmează un rezultat care poate fi adesea util pentru a testa divergenţa unei serii.

Teorema 15.1. Convergenţa la zero a termenului general

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă atunci* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Demonstraţie. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci şirul sumelor parţiale (s_n) converge la o limită "s". Rezultă că şirul s_{n-1} converge tot la "s" şi astfel $a_n = s_n - s_{n-1}$ converge la 0. Prin urmare $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Aplicaţie 15.1 Considerăm seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$. Deoarece $a_n = \dfrac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$ rezultă că seria considerată nu este convergentă.

Trebuie reţinut că dacă $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nu rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. Astfel de exemplu în cazul seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ avem:

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

şi

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Criteriul lui Cauchy de convergenţă a unei serii de numere reale

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N = N(\varepsilon)$ *astfel încât pentru* $n \geq N(\varepsilon)$ *şi* $p \geq 1$ *avem:*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Demonstraţie. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale (s_n): $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; converge.
Şirul (s_n) converge dacă şi numai dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $|s_q - s_r| < \varepsilon$ pentru $\forall q, r > N(\varepsilon)$. Aceasta este echivalent cu condiţia: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n \geq N(\varepsilon)$ şi $p \geq 1$ avem: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$. □

16 Reguli privind convergenţa seriilor de numere reale.

În continuare prezentăm câteva reguli relative la convergenţa seriilor de numere reale, care sunt utile în aplicaţii. Aceste reguli se obţin aplicând regulile de convergenţă a şirurilor la şirurile sumelor parţiale.

Regula sumei
Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt convergente atunci seria sumă* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *este convergentă şi are loc egalitatea:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Regula de înmulţire cu un număr
Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă atunci* $\forall k \in \mathbb{R}^1$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *este convergentă şi are loc egalitatea:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Criteriul 1 al comparaţiei. *Dacă* $0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *şi dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ şi $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Din ipoteză rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $0 \leq s_n \leq t_n$. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge atunci şirul t_n converge la un număr t: $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$.
Şirul (t_n) fiind crescător pentru orice n are loc $t_n \leq t$. De aici şi din $s_n \leq t_n$ rezultă inegalitatea $s_n \leq t$, $\forall n$. Prin urmare şirul crescător s_n este mărginit superior şi deci este convergent. Aceasta înseamnă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. □

Exemplu 16.1. Să se verifice că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$ este convergentă.

Soluţie. Fie $a_n = \frac{1+\cos n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$. Pentru orice n avem $a_n \geq 0$ şi $a_n \leq \frac{1}{2^n}$. Considerăm şirul $b_n = \frac{1}{2^n}$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Această serie din urmă fiind convergentă rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Criteriul 2 al comparaţiei. *Dacă seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt cu termeni pozitivi* ($a_n \geq 0$ *şi* $b_n \geq 0$) *şi* $\frac{a_n}{b_n} \to L \neq 0$ *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge dacă şi numai dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge.*

Demonstraţie. Presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă şi considerăm sumele parţiale:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n; \quad t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

Deoarece $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ pentru $\varepsilon = 1$ există $N_1 = N(1)$ astfel încât avem:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < 1, \ \forall n > N_1.$$

De aici rezultă inegalitatea:

$$\frac{a_n}{b_n} = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} - L + L \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| + |L| < 1 + |L| = k, \ \forall n > N_1.$$

Considerăm acum seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ unde $\alpha_n = a_{N_1+n}$ şi $\beta_n = k \cdot b_{N_1+n}$.

Inegalitatea $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$, $\forall n$ şi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=N_1+1}^{\infty} k \cdot b_n$ implică că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ este convergentă. Deoarece natura unei serii nu se schimbă dacă se adaugă la ea un număr finit de termeni rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Am arătat astfel că din convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rezultă convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Reciproca acestei afirmaţii se arată inversând rolurile lui a_n şi b_n în raţionamentul precedent şi observând că $\frac{b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{L}$. □

Exemplu 16.2. Să se verifice că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n}$ este convergentă.

Demonstraţie. Fie $a_n = \frac{1}{7 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n}$ şi $b_n = \frac{1}{5^n}$. Raportul $\frac{a_n}{b_n}$ converge la $\frac{1}{2} \neq 0$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ este convergentă. Rezultă astfel că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. $\square$

Criteriul raportului. *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este cu termeni poztivi* ($a_n > 0$) *şi şirul* $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *converge la* L *atunci: din* $L > 1$ *rezultă că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă; din* $L < 1$ *rezultă că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este covergentă; din* $L = 1$ *nu putem trage nici o concluzie.*

Demonstraţie. Presupunem $L < 1$ şi considerăm $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - L)$. Observăm că $\varepsilon > 0$ şi $L + \varepsilon = k < 1$. Deoarece $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $\alpha_n = |\alpha_n - L + L| \leq \varepsilon + L = k < 1$, $\forall n > N(\varepsilon)$. De aici rezultă inegalitatea $a_{n+1} \leq k \cdot a_n$, $\forall n > N(\varepsilon)$. Fie $\beta_n = a_{N(\varepsilon)+n}$. Pentru orice $n \geq 1$ avem $\beta_{n+1} \leq k \cdot \beta_n$ şi prin inducţie rezultă inegalitatea:

$$\beta_{n+1} \leq k^n \cdot \beta_1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \beta_1$ este o serie geometrică convergentă pentru că $k < 1$. De aici rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ converge şi , prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge de asemenea.

Presupunem acum $L > 1$ şi fie $\varepsilon = L - 1$. Numărul ε este pozitiv ($\varepsilon > 0$) şi deoarece $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $\alpha_n > L - \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Rezultă că $a_{n+1} > a_n$, $\forall n > N(\varepsilon)$ şi $a_n > a_{N(\varepsilon)}$, $\forall n > N(\varepsilon)$.

Deoarece $a_{N(\varepsilon)} \neq 0$ şirul (a_n) nu tinde la zero şi deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă. $\square$

Exemplu 16.3. Să se determine valorile lui x pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (4x^2)^n$ este convergentă.

Soluţie: Fie $a_n = n \cdot (4x^2)^n$ şi $\alpha_n = \frac{(n+1) \cdot (4x^2)^{n+1}}{n \cdot (4x^2)^n} = 4x^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Şirul (α_n) converge la $4x^2$; $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 4x^2$.

De aici rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă dacă $4x^2 > 1$($|x| > \frac{1}{2}$) şi este convergentă dacă $|x| < \frac{1}{2}$. Nu ştim deocamdată ce se întâmplă dacă $|x| = \frac{1}{2}$. Dacă $|x| = \frac{1}{2}$ atunci

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n$ şi deci seria este divergentă.

În consecinţă seria $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (4x^2)^n$ este convergentă dacă şi numai dacă $|x| < \frac{1}{2}$.

Criteriul rădăcinii. *Fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*
Dacă există $k \in (0,1)$ *şi* $N \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\sqrt[n]{a_n} \leq k$, $\forall n > N$ *atunci seria este convergentă.*
Dacă $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pentru o infinitate de termeni ai seriei atunci seria este divergentă.*

Demonstraţie. Dacă există $k \in (0,1)$ şi N astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \leq k$ pentru $n > N$ atunci $a_n \leq k^n$ pentru $n > N$. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ poate fi comparată cu seria geometrică $\sum_{k=1}^{\infty} k^n$, care este convergentă pentru că $k < 1$. Aceasta este demonstraţia în primul caz.
Dacă $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pentru o infinitate de termeni ai seriei, atunci $a_n \geq 1$ pentru o infinitate de termeni ai şirului (a_n) şi a_n nu tinde la zero. Rezultă astfel că seria este divergentă. Aceasta este demonstraţia în al doilea caz. □

Aplicaţie 16.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ este convergentă. Folosind criteriul rădăcinii avem: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$.

Criteriul de convergenţă pentru serii alternate (Leibnitz). *Dacă şirul* (b_n) *este monoton*
descrescător şi converge la zero ($b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) *atunci seria alternată* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$ *converge.*

Demonstraţie. Considerăm $s_m = \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \cdot b_n$ termenul general al şirului sumelor parţiale al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$. Subşirul termenilor de rang par s_{2m} are proprietatea:

$$s_{2m} = b_1 - (b_2 - b_3) - \ldots - (b_{2m-2} - b_{2m-1}) - b_{2m} \leq b_1$$

şi

$$s_{2m} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{2m-1} - b_{2m}).$$

Deci este mărginit superior şi este crescător.
Rezultă în acest fel că şirul (s_{2m}) este convergent. Fie $s = \lim_{m\to\infty} s_{2m}$.
În mod analog se arată că subşirul termenilor de rang impar (s_{2m+1}) este descrescător şi mărginit inferior. Rezultă astfel că şirul (s_{2m+1}) este convergent şi fie $t = \lim_{m\to\infty} s_{2m+1}$.
Avem:

$$t - s = \lim_{m\to\infty} (s_{2m+1} - s_{2m}) = \lim_{m\to\infty} b_{2m+1} = 0$$

Arătăm în final că $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s = t$.
Pentru aceasta fie $\varepsilon > 0$ şi $N_1 = N_1(\varepsilon)$, $N_2 = N_2(\varepsilon)$ aleşi astfel încât $|s_{2m} - s| < \varepsilon$ $\forall m > N_1$ şi $|s_{2m+1} - s| < \varepsilon$, $\forall m > N_2$. Fie $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$. Orice $n > N$ este par $n = 2m$ $(m > N_1)$ sau este impar $n = 2m + 1$ $(m > N_2)$. În ambele cazuri $|s_n - s| < \varepsilon$ dacă $n > N$. Cu alte cuvinte şirul (s_n) converge la s şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n$ este convergentă. $\square$

Exemplu 16.4. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$ este convergentă pentru că şirul $\dfrac{1}{n}$ este monoton descrescător şi tinde la 0.

Criteriul integral. *Fie $f : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ o funcţie continuă descrescătoare şi $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Considerăm şirul $j_n = \int\limits_1^n f(x)dx$.*

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (j_n) converge.
Demonstraţia acestei teoreme va fi făcută în secţiunea în care integrala Riemann este definită.

Aplicaţie 16.2. Arătaţi că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge dacă şi numai dacă $p > 1$.

Soluţie: Considerăm funcţia $f_p(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $x > 0$ şi $p > 0$. Funcţia f_p este continuă, descrescătoare şi $f_p(n) = \dfrac{1}{n^p} = a_n$. Pentru $p \neq 1$ avem:

$$j_n = \int\limits_1^n \frac{1}{x^p}dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^n = \frac{1}{1-p}(n^{1-p} - 1).$$

Pentru $p > 1$ avem $j_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{p-1}$ şi pentru $p < 1$ şirul (j_n) este divergent. Pentru $p = 1$ avem:

$$j_n = \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln x|_1^n = \ln(n)$$

şi şirul (j_n) este divergent.

Remarca 16.1. Dacă $p \leq 0$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ este divergentă pentru că termenul general al seriei nu tinde la zero.

Exemplu 16.5. Seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este divergentă şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă.

Comentariu. Seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ împreună cu seriile geometrice constituie o clasă de serii a căror convergenţă (divergenţă) este cunoscută.

17 Serii absolut convergente.

Definiţia 17.1. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este absolut convergentă dacă seria valorilor absolute* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă.*
O serie convergentă care nu este absolut convergentă este serie simplu convergentă.

Convergenţa absolută implică convergenţă. *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Pentru orice $n, m \in \mathbb{N},\ n > m$ avem:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \ldots + |a_n|$$

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice n, m cu proprietatea $n > m > N$ avem:

$$|a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon$$

De aici rezultă $|s_n - s_m| < \varepsilon,\ \forall n, m, n > m > N(\varepsilon)$. Folosind criteriul lui Cauchy obţinem convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Exemplu 17.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge pentru că este absolut convergentă.

Seria armonică alternată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este simplu convergentă. Ea converge (aşa cum rezultă din criteriul lui Leibnitz), dar nu converge absolut pentru că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Comentariu. Convergenţa absolută poate fi stabilită cu ajutorul criteriilor de convergenţă prezentate pentru serii cu termeni pozitivi.
Convergenţa absolută este importantă pentru că suma unei serii absolut convergente este independentă de ordinea în care se adună termenii.
Pe de altă parte, se poate arăta că oricare ar fi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ simplu convergentă şi oricare ar fi numărul real S, prin rearanjarea termenilor seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ putem avea: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
De exemplu, putem obţine orice număr real prin rearanjarea termenilor seriei armonice alternate.

Produsul Cauchy a două serii.

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt absolut convergente şi*

$$c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_1$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *este absolut convergentă şi are loc egalitatea:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Demonstraţie. Admitem la început că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt serii cu termeni pozitivi şi considerăm produsele:

$$\begin{array}{llll} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \ldots & \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \ldots & \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Dacă w_n este suma produselor din acest tabel situate în pătratul $n \times n$ cu vârful în $a_1 \cdot b_1$ atunci $w_n = s_n \cdot t_n$ unde s_n şi t_n sunt sumele parţiale ale seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

De aici

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Observăm acum că $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este suma produselor din acest tabel adunate după diagonală.

Astfel dacă u_n este suma parţială a lui $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ atunci:

$$w_{\left[\frac{n}{2}\right]} \leq u_n \leq w_n$$

Cu regula cleştelui rezultă $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

În cazul general, raţionamentul precedent poate fi repetat pentru seriile $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$; $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$; $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ pentru a deduce că seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă.

Deoarece seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este o combinaţie liniară a seriilor: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$;

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

□

18 Limita într-un punct a unei funcţii.

În calculul diferenţial şi calculul integral un concept important este conceptul de limită a unei funcţii într-un punct. Conceptul este folosit în studiul continuităţii, derivatei, integralei şi alte studii.
Considerăm o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Vom analiza comportamentul lui $f(x)$ atunci când x se apropie de o valoare reală fixată "a". Pentru aceasta se presupune că $f(x)$ este definit pentru orice x care se apropie de "a", nu însă neapărat şi în "a". Cu alte cuvinte vom presupune că domeniul de definiţie A conţine o mulţime de forma $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ unde $r > 0$.

Definiţia 18.1. *Funcţia f are limita numărul L în punctul "a" dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall\ x \in A,\ x \neq a$ şi $|x - a| < \delta$.*

Faptul ca funcţia f are limita L în punctul "a" se notează prin tradiţie astfel: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ sau $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$.

Comentariu:

1. Valoarea funcţiei f în punctul a, dacă există, nu intervine în definiţia limitei. Valoarea $f(a)$ poate să nu verifice inegalitatea din definiţia limitei.

2. Fiind dată funcţia f şi numărul L, inegalitatea $|f(x) - L| < \varepsilon$ înseamnă $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ şi prin urmare ε poate fi interpretată ca şi acurateţea prescrisă cu care se aproximează L; cât de aproape vrem să fim de L.

3. Numărul δ nu este determinat în mod unic de ε. După ce sa găsit un $\delta(\varepsilon)$, orice $\delta' < \delta(\varepsilon)$ poate fi luat.

Exemplu 18.1. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Soluţie: Fie $\varepsilon > 0$ şi să considerăm inegalitatea:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \quad \text{sau} \quad 4 - \varepsilon < \frac{x^2-4}{x-2} < 4 + \varepsilon$$

pentru $x \neq 2$. Aceasta este echivalentă cu inegalitatea: $4 - \varepsilon < x + 2 < 4 + \varepsilon$ sau $2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$, arătând că putem lua $\delta = \varepsilon$.

Exemplu 18.2. Să se arate că în orice punct $a > 0$, funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ are limită şi

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Soluţie: În adevăr, dacă $\varepsilon > 0$, atunci are loc

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \quad \text{sau} \quad \sqrt{a} - \varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{a} + \varepsilon$$

care prin ridicare la pătrat devine:

$$a - 2\sqrt{a}\cdot\varepsilon + \varepsilon^2 < x < a + 2\sqrt{a}\cdot\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Pentru un a şi un ε dat, putem lua $\delta = 2\sqrt{a}\cdot\varepsilon + \varepsilon^2$.

Exemplu 18.3. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ nu există.

Soluţie: Reamintim că oricât de aproape de $a = 0$ există x' astfel ca $f(x') = 1$ şi x'' astfel ca $f(x'') = -1$. Rezultă că pentru orice L există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall\delta > 0$ $\exists x$ cu $|x - 0| < \delta$ şi $\left|\sin\dfrac{1}{x} - L\right| > \varepsilon$.

Limita funcţiei f în punctul a (dacă există) este unică.

În adevăr: să presupunem prin absurd că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$ şi $L_1 \neq L_2$. Pentru $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$ există δ_1 astfel încât $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ pentru $0 < |x - a| < \delta_1$ şi există δ_2 astfel încât $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ pentru $0 < |x - a| < \delta_2$. De aici, pentru $0 < |x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ avem $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < |L_1 - L_2|$ ceea ce este absurd.

Teorema 18.1. ***(Teorema lui Heine)*** *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ are limită finită în "a" dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_n), $x_n \in A$, $x_n \neq a$, şi $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ şirul $(f(x_n))$ converge.*

Demonstraţie. Presupunem că $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ şi considerăm un şir (x_n) de numere reale cu următoarele proprietaţi: $x_n \in A$, $x_n \neq a$, şi $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Pentru $\delta > 0$ există $N = N(\delta)$ astfel încât $|x_n - a| < \delta$, $\forall\, n > N$. De aici rezultă $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ pentru $n > N$, deci şirul $(f(x_n))$ converge la L.
Presupunem acum că pentru orice şir de numere reale (x_n) cu următoarele proprietăţi: $x_n \in A$, $x_n \neq a$, şi $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, şirul $(f(x_n))$ converge. Vom arăta la început că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nu depinde de (x_n). Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că există două şiruri de numere reale (x'_n) şi $(x'_n{}')$ cu următoarele proprietăţi: $x'_n, x''_n \in A$, $x'_n \neq a$, $x''_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = L' \neq L'' = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$. Cu şirurile $(x'_n), (x''_n)$ construim şirul (x_n) definit astfel:

$$x_n = \begin{cases} x'_k & \text{pentru } n = 2k \\ x''_{k+1} & \text{pentru } n = 2k+1 \end{cases}$$

şi remarcăm că acest şir are următoarele proprietăţi: $x_n \in A,\ x_n \neq a$, şi $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Prin urmare şirul $(f(x_n))$ converge la un număr L. Deoarece $f(x'_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L'$ şi $f(x''_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L''$ trebuie să avem $L = L'$ şi $L'' = L$ şi astfel avem $L' = L''$ absurd.
Fie L valoarea comună a limitelor şirurilor $(f(x_n))$. Vom arăta că $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$. Pentru aceasta presupunem contrariul. Rezultă că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n \in A,\ x_n \neq a$ astfel încât $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ şi $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Rezultă de aici că şirul $(f(x_n))$ nu converge la L deşi $x_n \in A,\ x_n \neq a$ şi $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Absurd. □

Criteriul Cauchy-Bolzano pentru limita funcţiei.

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *are limită finită în "a" dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $0 < |x' - a| < \delta$ *şi* $0 < |x'' - a| < \delta$ *implică* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Presupunem că $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$ şi considerăm $\varepsilon > 0$. Există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru $0 < |x - a| < \delta$ să avem $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. De aici, pentru orice x', x'' cu $0 < |x' - a| < \delta$ şi $0 < |x'' - a| < \delta$ avem $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - L| + |f(x'') - L| < \varepsilon$.
Presupunem acum că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice x', x'' cu $0 < |x' - a| < \delta$ şi $0 < |x'' - a| < \delta$ avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ şi considerăm un şir de numere reale (x_n) cu următoarele proprietăţi: $x_n \in A, x_n \neq a$ şi $x_n \to a$.
Pentru $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ există $N = N(\delta)$ astfel încât $|x_n - a| < \delta$ pentru orice $n > N$. De aici, pentru $n, m > N$ avem $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Aceasta arată că şirul $(f(x_n))$ este convergent. Cu teorema lui Heine rezultă că f are limită în a. □

19 Reguli privind limita funcţiei într-un punct.

Fie $L,\ M,\ k \in \mathbb{R}^1$.

a) Dacă $f(x) = k =$*constant atunci* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} k,\ \forall a$.

b) Dacă $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$ *şi* $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M$ *atunci* $\begin{cases} f(x) \pm g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \pm M \\ f(x) \cdot g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \cdot M. \end{cases}$

c) Dacă $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$, $g(x) \neq 0$ *şi* $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M \neq 0$ *atunci* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{L}{M}$.

Demonstraţie. Vom demonstra doar implicaţia

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \quad \text{şi} \quad g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M \quad \Longrightarrow \quad f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L + M.$$

Celelalte se fac asemănător sau sunt mai degrabă tehnice şi pot fi omise la prima citire.
Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ şi $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ astfel încât:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pentru $0 < |x-a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ avem:

$$|f(x) + g(x) - (L+M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon$$

$\square$

Regula "cleştelui".
Dacă pe o mulţime de forma $I = (a-r, a) \cup (a, a+r)$, $r > 0$ funcţiile f, g, h verifică inegalităţile $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ şi dacă $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$ şi $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$ atunci $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$.

Demonstraţie. Deoarece $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in I$ avem $f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L$. De aici rezultă inegalitatea: $|g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\}$, $\forall x \in I$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ şi $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ astfel încât să avem:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{şi} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |h(x) - L| < \varepsilon.$$

De aici rezultă că:

$$0 < |x-a| < \min\{\delta_1, \delta_2\} \Longrightarrow |g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\} < \varepsilon$$

$\square$

Exemplu 19.1. Să se arate că $\sin\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} 0$ şi $\cos\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$.

Soluţie: Fie θ unghiul la centru măsurat în radiani într-un cerc de rază 1.

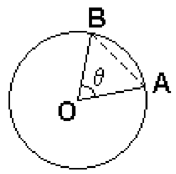


Figura 19.1:

Aria sectorului circular OAB este $\frac{|\,\theta\,|}{2}$ şi aria triunghiului OAB este $\frac{|\sin\theta\,|}{2}$. De aici avem:

$$0 \leq \frac{|\sin\theta|}{2} \leq \frac{|\,\theta\,|}{2} \quad \text{sau} \quad 0 \leq |\sin\theta| \leq |\theta|$$

Funcţiile $f(\theta) = 0$; $g(\theta) = |\sin\theta|$; $h(\theta) = |\theta|$ verifică condiţiile din regula cleştelui şi rezultă astfel că: $\sin\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} 0$.
Pentru a arăta că $\cos\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$ pornim de la identitatea $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ din care obţinem $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ şi deci $\cos^2\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$. De aici rezultă $\cos\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} \pm 1$, dar $\cos\theta$ fiind pozitiv în vecinătatea lui 0 rezultă că $\cos\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$.

Exemplu 19.2. Folosind regula cleştelui, putem arăta că $x \cdot \sin \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Observăm că $x \cdot \sin \frac{1}{x}$ verifică inegalităţile:

$$-|x| \le \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \le |x|, \quad \forall x \neq 0$$

Alegem $f(x) = -|x|, \;\; g(x) = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right|, \;\; h(x) = |x|$ şi aplicăm regula cleştelui; rezultă

$$x \cdot \sin \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Putem arăta în acest fel şi că $x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Exemplu 19.3. Putem arăta că $e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ "prinzând" exponenţiala e^x între $1 + x$ şi $1 + x + x^2$ pe o vecinătate a lui 0. Mai precis:

$$1 + x \le e^x \le 1 + x + x^2, \;\; \forall x \in (-\infty, 1).$$

Folosind inegalităţile precedente putem arăta: $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Limita funcţiei compuse: *Dacă $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$, $g(y) \underset{y\to L}{\longrightarrow} M$ şi $g \circ f$ este definit pe o mulţime ce conţine $I = (a - r) \cup (a, a + r)$, $r > 0$ atunci $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M$.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $g(y) \underset{y\to L}{\longrightarrow} M$ există $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ astfel încât $0 < |y - L| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - M| < \varepsilon$.
Asemănător din $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$ rezultă că există $\delta_2 = \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$ astfel încât $0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L| < \delta_1$.
De aici rezultă: $0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - M| = |g(f(x)) - M| < \varepsilon$.
Ceea ce arată că $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M$. $\square$

20 Limite laterale.

Limita $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ prezentată în Definiţia 18.1 este o limită bilaterală pentru că variabila x se poate apropia de a şi din stânga şi din dreapta. Vom analiza acum limite unilaterale, când variabila x se apropie de a doar din stânga sau doar din dreapta. Aceasta este necesar atunci când funcţia este definită doar în stânga sau doar în dreapta punctului a sau atunci când apropiindu-ne din stânga şi din dreapta obţinem limite diferite. Vom folosi următoarea terminologie:
"x tinde la a dinspre dreapta" sau "x coboară la a" şi notăm $x \to a^+$ sau $x \searrow a$.
"x tinde la a dinspre stânga" sau "x urcă la a" şi notăm $x \to a^-$ sau $x \nearrow a$.

Definiţia 20.1. *Limita la dreapta a funcţiei f în punctul a este L (sau limita lui $f(x)$ atunci când x tinde la a dinspre dreapta este L) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $a < x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*
Faptul că limita la dreapta a funcţiei f în punctul a este L se notează astfel:

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \textit{sau} \quad L = \lim_{x \searrow a} f(x)$$

Definiţia 20.2. *Limita la stânga a funcţiei f în punctul a este L (sau limita lui $f(x)$ atunci când x tinde la a dinspre stânga este L) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*
Faptul că limita la stânga a funcţiei f în punctul a este L se notează astfel:

$$L = \lim_{x \to a^-} f(x) \quad \textit{sau} \quad L = \lim_{x \nearrow a} f(x)$$

Observaţia 20.1. Dacă funcţia f are limită la stânga şi limită la dreapta în a şi aceste limite laterale sunt egale cu L:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

atunci funcţia f are limită în a şi această limită este L:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Exemplu 20.1. Funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ este definită doar pentru $x \geq 0$. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Exemplu 20.2. Funcţia

$$sign(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x > 0 \\ -1, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

nu are limită în $a = 0$. Limitele laterale însă există: $\lim_{x \to 0^+} sign(x) = 1$ şi $\lim_{x \to 0^-} sign(x) = -1$.

Exemplu 20.3. Funcţia treaptă şi funcţia scară.
Funcţia treaptă este definită astfel:

$$step(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } x = 0 \\ 1, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

Pentru $x \neq 0$ funcţia treaptă poate fi scrisă astfel:

$$step(x) = \frac{1}{2}(1 + sign(x)).$$

Funcţia treaptă are limite laterale în 0 şi: $\lim_{x \to 0^+} step(x) = 1$; $\lim_{x \to 0^-} step(x) = 0$.
Funcţia treaptă translatată $step(x - a)$ are treapta în punctul a (nu în 0) unde are limite laterale: $\lim_{x \to a^+} step(x - a) = 1$ şi $\lim_{x \to a^-} step(x - a) = 0$.

Funcţia scară este o funcţie cu mai multe trepte. De exemplu:

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} step(x-n)$$

La fiecare treaptă funcţia scară are o limită laterală la stânga şi o limită laterală la dreapta care sunt diferite şi sunt diferite şi de valoarea funcţiei S_m în punct. În toate celelalte puncte limitele laterale coincid şi deci funcţia scară are limită în puncte $x \neq n$.

Definiţia 20.3. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ este crescătoare dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2$ rezultă $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Definiţia 20.4. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ este descrescătoare dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2$ rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Definiţia 20.5. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ este monotonă dacă este crescătoare sau este descrescătoare.*

Existenţa limitelor laterale în cazul funcţiilor monotone
Dacă funcţia $f : (a,b) \to \mathbb{R}^1$ este monotonă atunci pentru orice $x_0 \in (a,b)$ limitele $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ există.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in (a,b)$ şi mulţimea:

$$S_{x_0} = \{f(x) | x < x_0\}$$

Dacă funcţia f este crescătoare, atunci mulţimea S_{x_0} este mărginită superior de $f(x_0)$ şi dacă f este descrescătoare, atunci mulţimea S_{x_0} este mărginită inferior de $f(x_0)$.
Dacă funcţia f este crescătoare, atunci marginea superioară a mulţimii S_{x_0} este limita la stânga a lui f în x_0: $\sup S_{x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ şi dacă f este descrescătoare atunci marginea inferioară a mulţimii S_{x_0} este limita la stânga a lui f în x_0; $\inf S_{x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
Considerând mulţimea:

$$R_{x_0} = \{f(x) | x > x_0\}$$

se arată de aceeaşi manieră că dacă f este funcţie crescătoare atunci $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \inf R_{x_0}$ şi dacă f este funcţie descrescătoare atunci $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \sup R_{x_0}$. □

21 Limite infinite.

Plus infinit $+\infty$ şi minus infinit $-\infty$ sunt simboluri matematice şi nu sunt numere cu care se fac operaţii algebrice.

Definiţia 21.1. *Limita la dreapta a funcţiei f în punctul a este $+\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există $\delta = \delta(M) > 0$ astfel încât:*

$$f(x) > M, \quad \forall x \in (a, a+\delta)$$

Faptul că limita la dreapta a funcţiei f în a este $+\infty$ se notează astfel: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Definiţia 21.2. *Limita la dreapta a funcţiei f în punctul a este $-\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există $\delta = \delta(M) > 0$ astfel încât:*

$$f(x) < -M, \ \ \forall x \in (a, a + \delta)$$

Faptul că limita la dreapta a funcţiei f în a este $-\infty$ se notează astfel: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Remarca 21.1. Limitele la stânga:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

şi limitele bilaterale:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se definesc analog.

Exemplu 21.1. Să se verifice că:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty.$

Exemplu 21.2. Se poate întâmpla ca o funcţie să aibe o limită laterală finită şi cealaltă limită laterală infinită într-un punct a. De exemplu:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0; \quad \lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$$

Limitele care se obţin pentru $x \to +\infty$ sau $x \to -\infty$ se numesc limite la $\pm\infty$ şi nu trebuiesc confundate cu limita infinită.

Definiţia 21.3. (limita la infinit) *Limita funcţiei f la $+\infty$ este L dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $M > 0$ astfel încât:*

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \ \ \forall x > M$$

Limita la $-\infty$ se defineşte analog.

Exemplu 21.3. Funcţia $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x + x^2}$ are următoarele limite la infinit:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

Definiţia 21.4. *(limita la infinit este infinit). Limita funcţiei f la $+\infty$ este $+\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există $M' > 0$ astfel încât $f(x) > M$, $(\forall)\ x > M'$ şi se notează* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Limita funcţiei f la $+\infty$ este $-\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există $M' > 0$ astfel încât $f(x) < -M$, $(\forall)\ x > M'$ şi se notează $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Limitele $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se definesc analog.

Exemplu 21.4. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

22 Punctele limită ale unei funcţii într-un punct.

Definiţia 22.1. *Numărul L este punct limită al funcţiei f în a dacă există un şir (x_n) de numere reale cu următoarele proprietăţi: $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ şi $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$; unde A este domeniul de definiţie al funcţiei f.*

Tradiţional mulţimea punctelor limită a lui f în a se notează $\mathcal{L}_a(f)$.

Definiţia 22.2. *Limita inferioară a funcţiei f în a este marginea inferioară a mulţimii $\mathcal{L}_a(f)$, adică $\inf \mathcal{L}_a(f)$. Limita inferioară a lui f în a se notează cu $\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$ şi avem:*

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \inf \mathcal{L}_a(f)$$

Definiţia 22.3. *Limita superioară a funcţiei f în a este marginea superioară a mulţimii $\mathcal{L}_a(f)$, adică $\sup \mathcal{L}_a(f)$. Limita superioară a lui f în a se notează cu $\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$ şi avem:*

$$\overline{\lim}_{x\to a} f(x) = \sup \mathcal{L}_a(f)$$

Are loc următoarea afirmaţie:
Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ mărginită pe o vecinătate a punctului a are limita L în punctul a dacă şi numai dacă:

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x) = L$$

Demonstraţie. Prima oară presupunem că $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ şi considerăm un şir (x_n) cu următoarele proprietăţi: $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $x_n \xrightarrow[x\to\infty]{} a$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Întrucât $x_n \xrightarrow[x\to\infty]{} a$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $|x_n - a| < \delta$ pentru orice $n > N$. Rezultă că pentru $n > N$ avem $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Se obţine astfel egalitatea $\mathcal{L}_a(f) = \{L\}$ şi prin urmare:

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x) = L$$

Presupunem acum că $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x) = L$ şi vrem să arătăm că $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.
Raţionăm prin reducere la absurd şi admitem că $f(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} L$. Rezultă că există ε_0 astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există x_n cu proprietatea $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ şi $|f(x_n) - L| > \varepsilon_0$. Şirul $(f(x_n))$ are un subşir $(f(x_{n_k}))$ care are limită. Este clar că $\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) \neq L$.
Rezultă că $\mathcal{L}_a(f)$ nu se reduce la un element. $\square$

Exemplu 22.1. Să se arate că dacă $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$ atunci $\mathcal{L}_0(f) = [-1, 1]$.

Soluţie: Fie $l \in [-1, 1]$. Ecuaţia $\sin\dfrac{1}{x} = l$ are o infinitate de soluţii: $x_n = \dfrac{1}{(-1)^n \arcsin l + n\pi}$.
Şirul (x_n) are următoarele proprietăţi: $x_n \in \mathbb{R}^1$, $x_n \neq 0$, $x_n \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ şi $f(x_n) = l$. Rezultă $l \in \mathcal{L}_0(f)$.
Prin urmare avem incluziunea $[-1, 1] \subset \mathcal{L}_0(f)$. Arătăm acum incluziunea $\mathcal{L}_0(f) \subset [-1, 1]$. Pentru aceasta fie $l \in \mathcal{L}_0(f)$. Există un şir (x_n) cu următoarele proprietăţi: $x_n \neq 0$, $x_n \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ şi $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.
Întrucât $f(x_n) = \sin\dfrac{1}{x_n}$ rezultă că $|f(x_n)| \leq 1$ şi deci $|l| \leq 1$. De aici avem apartenenţa $l \in [-1, 1]$.

23 Continuitatea unei funcţii într-un punct.

Imprecis dar sugestiv, o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ este continuă dacă graficul ei este o curbă continuă. În particular dacă A conţine o vecinătate a punctului $a \in A$, graficul lui f se trasează prin $(a, f(a))$ fără a ridica creionul de pe hârtie. Un asemenea comportament în $(a, f(a))$ se realizează dacă se impune ca pentru x aproape de a, $f(x)$ să fie aproape de $f(a)$. Dacă punctul a este izolat atunci x nu se poate apropia oricât de mult de a şi continuitatea are altă semnificaţie.
Fie $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ şi $a \in Int(A)$.

Definiţia 23.1. *Funcţia f este continuă în "a" dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Această definiţie impune trei condiţii: $f(a)$ este definită; există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Dacă a este un punct izolat atunci prin definiţie f este continuă în a.
Definiţia limitei într-un punct a funcţiei f, formulată în limbajul ε, δ poate fi uşor transpusă pentru a formula o definiţie a continuităţii în a a funcţiei f.

Definiţia 23.2. *Funcţia f este continuă in punctul "a" dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Exemplu 23.1. Să se verifice că funcţia $f(x) = x^2, \ x \in \mathbb{R}^1$ este continuă în $a = 0$.

Soluţie: Pentru $\varepsilon > 0$ determinăm x pentru care $|x^2 - 0| = |x^2| < \varepsilon$ şi găsim $|x| < \sqrt{\varepsilon}$.
Prin urmare, dacă $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ atunci $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$, pentru $\forall x$ astfel încât $|x - 0| < \sqrt{\varepsilon}$.

Definiţia 23.3. *Dacă funcţia f este continuă pentru orice $x \in (a, b)$ zicem că f este continuă pe intervalul (a, b).*

Dacă funcţia f este continuă în orice punct x din domeniul de definiţie zicem că f este continuă.

Definiţia 23.4. *Dacă* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ *atunci* f *este continuă la dreapta în* a.

Definiţia 23.5. *Funcţia* f *este continuă la stânga în* a *dacă* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Are loc următoarea afirmaţie:
Funcţia f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă este continuă la stânga şi la dreapta în* a.

Remarca 23.1. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ şi este continuă aceasta înseamnă că f este continuă pe (a, b), este continuă la dreapta în a şi continuă la stânga în b.

Teorema 23.1. **[de continuitate a lui Heine.]** *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *este continuă în punctul* $a \in \mathring{A}$ *dacă şi numai dacă pentru orice şir* (x_n) *cu proprietăţile:* $x_n \in A$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ *şirul* $(f(x_n))$ *converge la* $f(a)$.

Demonstraţie. Acest rezultat se obţine din teorema lui Heine pentru limită. $\square$

Teorema 23.2. **[de continuitate a lui Cauchy-Bolzano.]** *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *este continuă în punctul* $a \in \mathring{A}$ *dacă şi numai dacă* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $|x' - a| < \delta$ *şi* $|x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Rezultatul se obţine din teorema Cauchy-Bolzano pentru limită. $\square$

24 Reguli privind continuitatea unei funcţii într-un punct.

Regula sumei: *Dacă funcţiile* f *şi* g *sunt continue în punctul* $a \in \mathbb{R}^1$ *atunci funcţia* $f + g$ *este continuă în punctul* a.
Regula produsului: *Dacă funcţiile* f *şi* g *sunt continue în punctul* $a \in \mathbb{R}^1$ *atunci funcţia* $f \cdot g$ *este continuă în punctul* a.
Regula câtului: *Dacă funcţiile* f *şi* g *sunt continue în punctul* $a \in \mathbb{R}^1$, $g(x) \neq 0$ *pentru orice* x *atunci funcţia* $\dfrac{f}{g}$ *este continuă în punctul* a.
Regula cleştelui: *Dacă funcţiile* f, g *şi* h *sunt astfel încât inegalitatea:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

este verificată pe o vecinătate a punctului $a \in \mathbb{R}^1$ *şi* $f(a) = g(a) = h(a)$ *atunci continuitatea funcţiilor* f *şi* h *în punctul* a *implică continuitatea funcţiei* g *în punctul* a.

Aceste reguli se demonstrează folosind regulile cu aceeaşi denumire de la limită într-un punct.

Regula de continuitate a funcţiei compuse:
Dacă funcţia f *este continuă în* $a \in \mathbb{R}^1$ *şi funcţia* g *este continuă în* $f(a) \in \mathbb{R}^1$ *atunci funcţia compusă* $g \circ f$ *este continuă în* a.

Demonstraţie. Fie $b = f(a)$. Deoarece g este continuă în b, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|t - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(t) - g(b)| < \varepsilon$.
Deoarece f este continuă în "a" pentru $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ există $\delta_2 = \delta_2(\delta_1) = \delta_2(\varepsilon)$ astfel încât $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$. Deducem că $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.
Prin urmare: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_2(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|x - a| < \delta \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$. □

Aplicaţie 24.1 Deoarece funcţia identică $x \mapsto x$, funcţia constantă $x \mapsto k$ şi funcţiile trigonometrice sin şi cos sunt continue, în virtutea regulilor precedente, următoarele funcţii sunt continue:

$$x \longmapsto \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}; \quad x \longmapsto x^3 \cdot \cos x^2; \quad x \longmapsto \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Prelungirea prin continuitate.
Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ nu este definită în punctul "a" dar $L = \lim_{x \to a} f(x)$ există şi este finită atunci funcţia $g : A \cup \{a\} \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, definită prin $g(x) = f(x)$ pentru $x \neq a$ şi $g(a) = L$ este continuă în a.
Funcţia g se numeşte prelungirea prin continuitate a funcţiei f.

Exemplu 24.1. Funcţia $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ definită cu:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este prelungirea prin continuitate a funcţiei $f : \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^1$ definită cu $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

25 Proprietăţi ale funcţiilor continue.

Proprietatea de mărginire: *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ este continuă atunci:*

1. *funcţia f este mărginită pe $[a, b]$.*
2. *funcţia f îşi atinge marginile în anumite puncte din $[a, b]$.*

Comentariu:

1. Prima afirmaţie înseamnă că există numerele reale m şi M astfel încât $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a, b]$.
2. Cea de-a doua afirmaţie înseamnă că dacă $m = \inf \{f(x) |\ x \in [a, b]\}$ şi $M = \sup \{f(x) |\ x \in [a, b]\}$ atunci există c şi d în $[a, b]$ astfel încât $m = f(c)$ şi $M = f(d)$.

Demonstraţie. Demonstraţia mărginirii. Fie $B = \{x |\ x \in [a, b]$ şi f este mărgintă pe $[a, x]\}$. Mulţimea B conţine pe a ($a \in B$) şi este mărginită; $y \leq b,\ \forall\, y \in B$. Fie $c = \sup B$. Întrucât funcţia f este continuă la dreapta în punctul a, pentru $\varepsilon = 1$ există $\delta_1 = \delta(\varepsilon) =$

$\delta(1) > 0$ astfel încât: $a < x < a + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < 1$. De aici rezultă inegalitatea $|f(x)| < 1 + |f(a)|, \quad \forall\, x \in [a, a+\delta_1]$. Prin urmare $c > a + \dfrac{\delta_1}{2} > a$.
De fapt va trebui să arătăm că $c = b$. Deocamdată am obţinut doar că $c > a$. Presupunem prin absurd că $c < b$. Deoarece $c > a$ şi f este continuă în c rezultă că pentru $\varepsilon = 1$ există $\delta' = \delta'(\varepsilon) = \delta'(1) > 0$ astfel încât $|x - c| < \delta' \Rightarrow |f(x)| \le 1 + |f(c)|$. Altfel spus funcţia f este mărginită pe $[c, c+\delta']$. De aici $c + \dfrac{\delta'}{2} \in B$ şi aceasta contrazice faptul că $c = \sup B$.
Prin urmare $c = b$ şi astfel f este mărginită pe $[a, b]$. □

Demonstraţie. Demonstraţia atingerii marginii. Deoarece funcţia f este mărginită pe $[a, b]$ mulţimea: $A = f([a, b]) = \{f(x) | x \in [a, b]\}$ este mărginită. Fie $m = \inf A$ şi $M = \sup A$. Să presupunem prin absurd că $f(x) \neq M, \ \forall\, x \in [a, b]$ şi să considerăm funcţia $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ definită pentru $x \in [a, b]$. Funcţia g construită în acest fel este continuă şi conform primei părţi din această demonstraţie, este mărginită pe $[a, b]$. Fie K astfel încât:

$$g(x) \le K, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

De aici se obţine:

$$\frac{1}{M - f(x)} \le K \Rightarrow \frac{1}{K} \le M - f(x) \Rightarrow f(x) \le M - \frac{1}{K}, \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Această din urmă inegalitate contrazice egalitatea $M = \sup A$. Prin urmare ipoteza $f(x) \neq M, \quad \forall\, x \in [a, b]$ este absurdă. Trebuie deci să admitem că există $x_M \in [a, b]$ astfel încât $f(x) = M$. Analog se arată că f îşi atinge marginea inferioară. □

Proprietatea valorii intermediare (proprietatea lui Darboux)
Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ este continuă atunci pentru orice γ situat între $\alpha = f(a)$ şi $\beta = f(b)$ există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \gamma$.
Comentariu: De aici rezultă că dacă f are valorile α' şi β' în punctele x' şi x'' din $[a, b]$ atunci f are toate valorile posibile între α' şi β'.

Demonstraţie. Pentru a face o alegere, admitem că $\alpha < \gamma < \beta$ şi considerăm mulţimea

$$S = \{x \mid x \in [a, b] \text{ şi } f(x) < \gamma\}.$$

Mulţimea S conţine pe a deci S nu este vidă. Considerăm $c = \sup S$ şi observăm că $c \in (a, b)$. Vom arăta că $f(c) = \gamma$. Pentru aceasta raţionăm prin reducere la absurd şi admitem că $f(c) \neq \gamma$. Rezultă de aici că $f(c) < \gamma$ sau $f(c) > \gamma$.
Dacă $f(c) < \gamma$ atunci pentru $\varepsilon = \gamma - f(c)$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

În particular

$$|f(c + \frac{\delta}{2}) - f(c)| < \varepsilon$$

şi astfel: $f(c + \dfrac{\delta}{2}) - f(c) < \gamma - f(c)$.
De aici $f(c + \dfrac{\delta}{2}) < \gamma$ şi deci $c + \dfrac{\delta}{2} \in S$. Aceasta contrazice egalitatea $c = \sup S$. Prin

urmare nu putem avea $f(c) < \gamma$.
Dacă $f(c) > \gamma$, atunci pentru $\varepsilon = f(c) - \gamma > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca: $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. De aici rezultă că dacă $x \in (c - \delta, c]$ atunci $f(x) > \gamma$ şi deci $x \notin S$. Altfel spus $\sup S \leq c - \delta$ ceea ce contrazice $c = \sup S$.
Rezultă în final $f(c) = \gamma$. □

Proprietatea lui Darboux are multe aplicaţii. Iată una din acestea:

Aplicaţia 25.1 Orice polinom de grad impar are cel puţin o rădăcină reală.

Demonstraţie. Fie $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ un polinom de grad n= impar. Fără a pierde din generalitate, putem presupune $a_n = 1$.
Ştim că $P = P(X)$ este o funcţie continuă şi considerăm funcţia

$$r(X) = \frac{P(X)}{X^n} - 1, \quad X \neq 0$$

Funcţia $r(X)$ se majorează astfel:

$$|r(X)| = \left|\frac{P(X)}{X^n} - 1\right| = \left|\frac{a_{n-1}}{X} + ... + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n}\right| \leq \left|\frac{a_{n-1}}{X}\right| + ... + \left|\frac{a_1}{X^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_0}{X^n}\right|$$

şi dacă $M = \max\{|a_{n-1}|, ..., |a_1|, |a_0|\}$ atunci:

$$|r(X)| \leq M \cdot \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{|X|^r} < M \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{|X|^r} = \frac{M}{|X| - 1}, \quad \forall\, |X| > 1$$

De aici $|r(X)| < 1$ pentru $|X| > 1 + M$. În particular $1 + r(X) > 0$ pentru orice X cu $|X| > 1 + M$. De aici rezultă că $P(X) = X^n(1 + r(X))$ are acelasi semn ca X^n pentru $|X| > 1 + M$.
Întrucât n este număr impar rezultă că există $\alpha > 0$ şi $\beta < 0$ astfel ca $P(\alpha) > 0$ (se alege $\alpha > 1 + M$) şi $P(\beta) < 0$ (se alege $\beta < -(1 + M)$). Folosind proprietatea valorii intermediare rezultă că există c ($|c| < 1 + M$) astfel încât $P(c) = 0$.
Aceasta arată că P are o rădăcină în intervalul $(-(1 + M), 1 + M)$.
De fapt toate rădăcinile reale ale polinomului P sunt în interalul $(-(1 + M), 1 + M)$. □

Proprietatea de transformare a intervalului în interval
Dacă funcţia $f : [a, b] = I \to \mathbb{R}^1$ este continuă atunci mulţimea $f(I)$ este un interval mărginit şi închis.
Comentariu: Această proprietate a funcţiei continue arată că ea transformă un interval mărginit şi închis tot într-un interval mărginit şi închis.

Demonstraţie. Din proprietatea de mărginire rezultă că există $c, d \in I$ astfel încât:

$$f(c) = m_0 = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$$

$$f(d) = M_0 = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$$

Pentru a face o alegere presupunem că $c \leq d$. Proprietatea valorii intermediare aplicată pe subintervalul $[c, d]$ arată că f ia toate valorile dintre $m_0 = f(c)$ şi $M_0 = f(d)$. Cu alte cuvinte $f(I) = [m_0, M_0]$. □

Proprietatea de punct fix.
Dacă funcţia $f : [a,b] \to [a,b]$ este continuă atunci există cel puţin un punct $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = c$ (c este punct fix pentru f).
Comentariu: Această propritate spune că gaficul funcţiei intersectează prima bisectoare $y = x$.

Demonstraţie. Fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ definit prin $g(x) = f(x) - x$. Funcţia g este continuă. Dacă $f(a) = a$ sau $f(b) = b$ atunci nu avem nimic de demonstrat. Putem deci presupune că $f(a) \neq a$ şi $f(b) \neq b$. De aici $g(a) = f(a) - a > 0$ şi $g(b) = f(b) - b < 0$. Proprietatea valorii intermediare în cazul funcţiei g arată că există $c \in (a,b)$ astfel încât $g(c) = 0$. De aici rezultă egalitatea $f(c) = c$. □

Proprietatea de continuitate a funcţiei inverse
Dacă $f : I \to J$ este o bijecţie continuă definită pe intervalul I şi cu valori pe intervalul J atunci funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este continuă.

Demonstraţie. Considerăm o bijecţie continuă $f : I \to J$ definită pe intervalul I şi cu valori pe intervalul J.
Prima oară arătăm că funcţia f este sau strict crescătoare sau strict descrescătoare. Pentru aceasta raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că f nu este nici strict crescătoare nici strict descrescătoare. În acest caz există în I trei numere a_1, a_2, a_3 cu următoarele proprietăţi: $a_1 < a_2 < a_3$ şi $f(a_1) < f(a_3) < f(a_2)$. Aplicăm proprietatea valorii intermediare funcţiei f pe $[a_1, a_2]$ şi deducem că există $c \in (a_1, a_2)$ astfel încât $f(c) = f(a_3)$. Aceasta contrazice faptul că f este bijecţie. În demonstraţie presupunem în continuare că f este crescătoare. Demonstraţia este similară dacă f este descrescătoare. Funcţia f fiind deci strict crescătoare, funcţia f^{-1} este şi ea strict crescătoare.
Fie acum $b \in J$ şi $a = f^{-1}(b) \in I$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ (suficient de mic) funcţia f transformă intervalul $I_a^\varepsilon = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ în intervalul $J_b^\varepsilon = f(I_a^\varepsilon) = [m, M]$. Deoarece funcţia f este strict crescătoare, rezultă $b \in (m, M)$. Fie $\delta = \min\{b - m, M - b\} > 0$. Intervalul închis $[b - \delta, b + \delta]$ este o submulţime a intervalului $[m, M] = f(J_b^\varepsilon)$ şi f^{-1} transformă intervalul $[b - \delta, b + \delta]$ în $I_a^\varepsilon = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Rezultă astfel că pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca

$$|y - b| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$$

□

Dacă funcţia $f : I \to J$ este o surjecţie strict monotonă a intervalului I pe intervalul J atunci funcţia f şi inversa ei f^{-1} sunt continue.

Definiţia 25.1. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ este uniform continuă pe A dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:*

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad \forall\, x', x'' \in A$$

Teorema de continuitate uniformă.
Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ este continuă atunci f este uniform continuă.
Comentariu: Această teoremă afirmă de fapt că o funcţie continuă pe un interval mărginit şi închis este uniform continuă.

Demonstraţie. Este tehnică şi nu o facem. □

26 Şiruri de funcţii. Mulţimea de convergenţă.

Fie $A \subset \mathbb{R}^1$ şi $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un şir de funcţii reale definite pe A: $f_n : A \to \mathbb{R}^1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vom nota acest şir cu (f_n).

Definiţia 26.1. *Un element $a \in A$ este punct de convergenţă al şirului (f_n) dacă şirul de numere reale $(f_n(a))$ converge.*
Mulţimea punctelor de convergenţă ale şirului (f_n) se numeşte mulţimea de convergenţă a şirului (f_n).

Fie $B \subset A$ mulţimea de convergenţă a şirului (f_n). Pentru orice $b \in B$ există $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(b)$ şi are sens să considerăm funcţia $f : B \to \mathbb{R}^1$ definită prin:

$$f(b) = \lim_{n\to\infty} f_n(b)$$

Funcţia f definită în acest fel se numeşte limita şirului de funcţii f_n pe mulţimea B. Se mai spune că şirul f_n converge la f pe B.

Definiţia 26.2. *Fie (f_n) un şir de funcţii reale definite pe $A \subset \mathbb{R}^1$: $f_n : A \to \mathbb{R}^1$. Funcţia $f : A \to \mathbb{R}^1$ este limita şirului de funcţii (f_n) dacă pentru orice $x \in A$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(x, \varepsilon)$ astfel ca pentru $n > N(x, \varepsilon)$ să avem:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Faptul că funcţia f este limita şirului de funcţii (f_n) pe A se notează astfel: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ pe A.

Comentariu: Dacă în definiţia precedentă N depinde doar de ε şi nu depinde de x atunci zicem că şirul (f_n) converge uniform la f pe A.

Definiţia 26.3. *Şirul de funcţii (f_n) converge uniform la funcţia f pe mulţimea A dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi $x \in A$ are loc:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Exemplu 26.1. Considerăm $A = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x = 1 \\ 0, & \text{pentru } 0 \le x < 1 \end{cases}$.
Şirul de funcţii (f_n) converge la f şi nu converge uniform la f.

Exemplu 26.2. Considerăm $A = [0, 2\pi]$, $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $f(x) = 0$, $x \in A$.
Şirul de funcţii (f_n) converge uniform la f pe A.

Faptul că şirul de funcţii (f_n) converge uniform la funcţia f pe mulţimea A se notează astfel:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f, \quad \text{pe } A$$

Urmează în continuare două criterii de convergenţă uniformă.
Criteriul 1 (Cauchy). *Şirul de funcţii reale* (f_n)*:* $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *converge uniform la funcţia* $f : A \to \mathbb{R}^1$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N = N(\varepsilon)$ *astfel încât pentru orice* $n, m > N(\varepsilon)$ *şi orice* $x \in A$ *are loc:*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Demonstraţie. Presupunem prima oară că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe A. Pentru $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $p \geq N(\varepsilon)$ are loc $|f_p(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, x \in A$. Fie $n, m > N(\varepsilon)$ şi $x \in A$. Are loc inegalitatea:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Presupunem acum că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n, m > N(\varepsilon)$ şi $x \in A$ are loc:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

şi arătăm că există $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ astfel ca $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.
Din ipoteză rezultă că pentru orice $x \in A$ şirul de numere $(f_n(x))$ este convergent. Deci şirul de funcţii (f_n) converge la o funcţie f pe A: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ pe A.
Considerăm $\varepsilon > 0$ şi $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n, m > N(\varepsilon)$ şi $x \in A$ să avem:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Alegem $m_0 > N(\varepsilon)$ şi din $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ deducem că:

$$|f(x) - f_{m_0}(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A$$

Aceasta arată că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe A. □

Criteriul 2. *Fie* (f_n) *un şir de funcţii reale:* $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *şi o funcţie reală* $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$*. Dacă există un şir de numere reale pozitive* (a_n) *care converge la zero şi verifică* $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi orice* $x \in A$ *atunci* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ *pe* A*.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_n \to 0$, există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n \geq N(\varepsilon)$ are loc $a_n < \varepsilon$. Rezultă că $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$ şi $x \in A$. Cu alte cuvinte $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$. □

27 Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii şi continuitatea.

Propoziţia următoare arată că, convergenţa uniformă păstrează continuitatea:

Propoziţia 27.1. *Fie (f_n) un şir de funcţii reale $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ uniform convergent la o funcţie reală $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$; $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$. Dacă funcţiile f_n sunt continue într-un punct $a \in A$ atunci funcţia f este continuă în a.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $x \in A$ are loc $|f_{N(\varepsilon)}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. În particular, avem:

$$|f_{N(\varepsilon)}(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Deoarec funcţia $f_{N(\varepsilon)}$ este continuă în punctul a există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
De aici, rezultă că pentru orice x cu $|x - a| < \delta$ avem:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x)| + |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(a)| + |f_{N(\varepsilon)}(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

Aceasta arată că funcţia f este continuă în a. □

Consecinţa 27.1. *Limita unui şir uniform convergent de funcţii continue este funcţie continuă.*

28 Şiruri de funcţii reale egal continue şi egal mărginite.

Fie (f_n) un şir de funcţii reale de variabilă reală: $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.
Expresia:

> "*(f_n) este un şir de funcţii continue pe A*" înseamnă că:
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in A, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(n, x, \varepsilon) > 0,\ \text{a.î. } |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Dacă funcţiile f_n sunt uniform continue pe A, atunci δ nu depinde de x. Prin urmare, expresia

> "*(f_n) este un şir de funcţii uniform continue pe A*" înseamnă că:
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(n, \varepsilon) > 0,\ \text{a.î.}$$
>
> $$|x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \forall\, x', x'' \in A.$$

Se poate întâmpla că δ nu depinde de n, dar depinde de x şi ε. În acest caz şirul (f_n) este un şir de funcţii egal continue. Mai precis:

> *Şirul de funcţii (f_n) este un şir de funcţii egal continue pe A dacă pentru orice $x \in A$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice n are loc:*
>
> $$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon.$$

Dacă δ nu depinde de x şi n, atunci funcţiile din şirul (f_n) sunt uniform continue şi egal continue. Mai exact:

Şirul de funcţii (f_n) este un şir de funcţii egal uniform continue pe A dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ şi } \forall\, x', x'' \in A.$$

Şirul (f_n) este un şir de funcţii mărginite pe A dacă $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, M = M(n) > 0$ astfel încât $|f_n(x)| < M$, $\forall\, x \in A$.

Dacă M nu depinde de n atunci funcţiile din şirul (f_n) sunt egal mărginite. Mai exact:

Şirul (f_n) este un şir de funcţii egal mărginite pe A dacă există $M > 0$ astfel încât $|f_n(x)| < M$, $\forall\, n \in N$, $\forall\, x \in A$.

Teorema 28.1. [Arzela-Ascoli]. *Fie $I = [a, b]$ un interval închis şi (f_n) un şir de funcţii reale $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^1$. Dacă şirul (f_n) este un şir de funcţii egal continue şi egal mărginite atunci şirul (f_n) conţine un subşir (f_{n_k}) care este uniform convergent.*

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă în acest curs. □

29 Serii de funcţii. Convergenţă şi convergenţa uniformă.

Fie $A \subset \mathbb{R}^1$ şi f_n un şir de funcţii reale $f_n : A \to \mathbb{R}^1$.

Definiţia 29.1. *Simbolul $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este o serie de funcţii convergentă în $a \in A$ dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ este convergentă.*

Simbolul $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este o serie de funcţii divergentă în $a \in A$ dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ este divergentă.

Definiţia 29.2. *Un punct $a \in A$ este punct de convergenţă al seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dacă seria converge în "a".*

Mulţimea punctelor de convergenţă ale seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se numeşte mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Fie $B \subset A$ mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Pentru $x \in B$ notăm cu $S(x)$ suma:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Stabilim astfel o corespondenţă de la mulţimea B la $\mathbb{R}^1$. Adică o funcţie

$$S : B \subset A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

Funcţia definită mai sus se numeşte suma seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *pe mulţimea* B.

Tradiţional suma seriei de funcţii se notează cu $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pentru $x \in B$.

Definiţia 29.3. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii definite pe* A *şi* S *o funcţie definită pe* $B \subset A$. *Seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge la* S *pe mulţimea* B *dacă pentru orice* $x \in B$ *şi orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N = N(x, \varepsilon) > 0$ *astfel încât pentru orice* $n > N$ *avem:*

$$|f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Dacă numărul N nu depinde de x atunci seria converge uniform la S pe B. În acest caz avem următoarea definiţie:

Definiţia 29.4. *Seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniform la* S *pe* B *dacă* $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N = N(\varepsilon)$ *astfel încât:*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall\ n > N(\varepsilon), \quad \forall\ x \in B.$$

Definiţia 29.5. *Seria de funcţii reale* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge absolut pe* B *dacă seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *converge pe* B.

Dacă seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolut pe B atunci ea converge pe B.

Exemplu 29.1. a) Considerăm şirul de funcţii $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1 + x^2)^n}$ $n \geq 0$, şi seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii este $\mathbb{R}^1$ şi suma seriei este funcţia:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Seria de funcţii este absolut convergentă pe $\mathbb{R}^1$.

b) Pentru $n \geq 1$ considerăm şirul de funcţii definit pe $\mathbb{R}^1$ astfel: $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{n^2}$ şi seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.
Seria de funcţii este absolut convergentă pe $\mathbb{R}^1$. Seria de funcţii este uniform convergentă pe $\mathbb{R}^1$.

c) Pentru $n \geq 1$ considerăm $f_n(x) = \cos^n x$ şi seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Mulţimea de convergenţă a seriei este $\mathbb{R}^1 \setminus \{k\pi\}_{k\in Z}$. Seria este absolut convergentă pe această mulţime.

d) Pentru $n \geq 1$ considerăm $f_n(x) = \dfrac{e^{n|x|}}{n}$ şi seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Mulţimea de convergenţă a acestei serii de funcţii este vidă.

30 Criterii de convergenţă pentru serii de funcţii.

Considerăm seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ definite pe A; $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.

Definiţia 30.1. *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} f_n$ *se numeşte restul de ordinul* $k+1$ *al seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Criteriul 1: *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este convergentă pe* A *dacă şi numai dacă restul de orice ordin al seriei este convergent pe* A.

Demonstraţie. Considerăm sumele parţiale:

$$\begin{array}{rllll} S_k = & f_1 & +f_2 & + \ ... & +f_k \\ \sigma_p^k = & f_{k+1} & +f_{k+2} & + \ ... & +f_{k+p} \end{array}$$

şi observăm că

$$S_{k+p} = S_k + \sigma_p^k$$

Din această egalitate rezultă că şirul (S_{k+p}) converge pentru $p \to \infty$ dacă şi numai dacă şirul (σ_p^k) converge pentru $p \to \infty$. $\square$

Criteriul 2: *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este convergentă pe* A *dacă şi numai dacă şirul sumelor resturilor converge la zero pe* A.

Demonstraţie. Imediată. $\square$

Criteriul 3 (Cauchy): *Seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniform pe* A *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N = N(\varepsilon)$ *astfel ca pentru* $n \geq \mathbb{N}$ *şi* $p \geq 1$ *să aibe loc:*

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in A$$

Demonstraţie. Criteriul este o consecinţă a criteriului Cauchy pentru şiruri. $\square$

Criteriul 4: *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie de numere pozitive convergentă. Dacă* $|f_n(x)| \leq a_n, \ \forall\, x \in A, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *atunci seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă pe* A.

Demonstraţie. Imediată. $\square$

31 Serii de puteri.

Definiţia 31.1. *O serie de funcţii de forma* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \ x \in \mathbb{R}^1$ *se numeşte serie de puteri.*

Orice serie de puteri converge pentru $x = 0$.

Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri.

Teorema 31.1. [Abel-Cauchy-Hadamard.] *Seria de puteri* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *este absolut convergentă în orice punct* x *cu* $|x| < R$ *unde* R *este:*

$$\begin{array}{ll} R = \dfrac{1}{\omega} & \textit{pentru } \ 0 < \omega \leq +\infty \\ R = +\infty & \textit{pentru } \ \omega = 0 \end{array}$$

şi $\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Seria de puteri este divergentă în orice punct x *cu* $|x| > R$.
Pentru orice $r \in (0, R)$ *seria de puteri este uniform convergentă pe intervalul închis* $[-r, r]$.
R *se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri.*

Demonstraţie. Considerăm un punct $x_0 \in \mathbb{R}^1$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x_0|^n$. Aplicăm criteriul rădăcinii acestei serii şi obţinem: dacă $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| < 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$ este absolut convergentă. Cu alte cuvinte, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$ este absolut convergentă pentru $|x_0| < R$, unde $R = \dfrac{1}{\omega}$ dacă $0 < \omega \leq +\infty$ şi $R = +\infty$ dacă $\omega = 0$, iar $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Aplicând acelaşi criteriu rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$ este divergentă pentru orice x_0 cu $|x_0| > R$.
Pentru $r \in (0, R)$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$ converge ($x = r$ este un punct în care $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ converge absolut) şi pentru $x \in [-r, r]$ are loc:

$$|a_n| \cdot |x|^n \leq |a_n| \cdot r^n$$

Conform Criteriului 4 de convergenţă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$. □

Exemplu 31.1. a) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ este absolut convergentă pentru $|x| < 1$ şi este divergentă pentru $|x| > 1$. Raza de convergenţă a seriei este $R = 1$; mulţimea de convergenţă este intervalul deschis $(-1, 1)$.

b) Pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ raza de convergenţă R este $R = 1$. Mulţimea de convergenţă este $[-1, 1)$.

c) Mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ este $(-1, 1]$.

d) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ $\alpha > 1$ este absolut convergentă pe $[-1, 1]$.

În ceea ce priveşte continuitatea sumei unei serii de puteri avem:

Teorema 31.2. Teorema de continuitate a sumei. *Suma S a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o funcţie continuă pe (-R,R).*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in (-R, R)$. Există $r > 0$ şi $r < R$ astfel încât să aibă loc: $-R < -r < x_0 < r < R$. Deoarece pe intervalul închis $[-r, r]$ seria converge uniform şi termenii seriei sunt funcţii continue, suma S este funcţie continuă pe $[-r, r]$. În particular, S este o funcţie continuă în x_0.

Suma S a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform continuă pe orice interval compact conţinut în $(-R, R)$. $\square$

Remarca 31.1. Consideraţiile acestea pot fi aplicate şi în cazul seriilor de forma: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

32 Operaţii cu serii de puteri.

Considerăm seriile de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ având razele de convergenţă R_1 şi R_2 şi presupunem că are loc $0 < R_1 \leq R_2$. Notăm cu $f(x)$ suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi cu $g(x)$ suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad \text{şi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$$

Regula sumei. *Seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$ *are raza de convergenţă cel puţin* R_1 *şi are loc:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \ \ \forall\, x : \, |x| < R_1$$

Regula înmulţirii cu un număr. *Seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n x^n$ *are raza de convergenţă cel puţin* R_1 *şi are loc:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n x^n = k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ \ \forall\, x : \, |x| < R_1$$

Regula produsului. *Seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *are raza de convergenţă* R_1 *şi are loc:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$$

unde $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$.

Demonstraţie. Aceste reguli se obţin în baza regulilor generale relative la serii de funcţii. $\square$

Remarca 32.1. Aceste reguli pot fi aplicate şi la serii de forma: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

33 Derivabilitatea funcţiilor.

Intuitiv vorbind, o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ este derivabilă(diferenţiabilă) în $c \in A$ dacă în punctul $P(c, f(c))$ se poate trasa tangenta la graficul funcţiei.
Panta corzii PQ din figura 33.1:

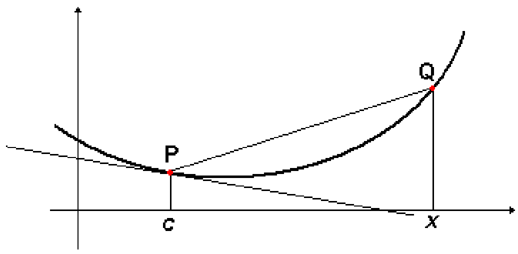


Figura 33.1:

este $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ şi ceea ce se cere este ca aceasta să tindă la panta tangentei în P atunci când Q se apropie de P.
Această idee geometrică motivează următoarea definiţie:

Definiţia 33.1. *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *este derivabilă (diferenţiabilă) în punctul* $c \in \mathring{A}$ *dacă există limita* $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ *şi este finită.*

Tradiţional valoarea limitei se notează cu $f'(c)$ sau cu $\dfrac{df}{dx}(c)$ şi se numeşte derivata lui f în c.

Exemplu 33.1. Funcţia $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}^1$ este derivabilă (diferenţiabilă) în orice punct $c \in \mathbb{R}^1$.

În adevăr pentru c fixat, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ (pentru $x \neq c$) în cazul de faţă este:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \frac{(x - c) \cdot (x + c)}{x - c} = x + c \xrightarrow[x \to c]{} 2c$$

De aici, rezultă că funcţia f este derivabilă (diferenţiabilă) în punctul c şi $f'(c) = 2c$.

Exemplu 33.2. Funcţia $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}^1$ este derivabilă (diferenţiabilă) în orice $c \neq 0$.
Este uşor de verificat că funcţia f este derivabilă (diferenţiabilă) în orice $c \neq 0$ şi $f'(c) = 1$ pentru $c > 0$ şi $f'(c) = -1$ pentru $c < 0$.
Pentru $c = 0$ avem:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x > 0 \\ -1, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

De aici

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1 \quad \text{şi} \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1$$

Deoarece aceste limite laterale nu coincid, f nu este derivabilă (diferenţiabilă) în $c = 0$.

Definiţia 33.2. *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ este derivabilă (diferenţiabilă) în orice punct $a \in A$ atunci funcţia $f' : A \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ definită prin $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se numeşte derivata funcţiei f.*

Remarca 33.1. În general, punctele în care f nu este derivabilă (diferenţiabilă), pot fi identificate adesea examinând limitele laterale ale raportului $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ dacă $x \to c$.

Limita la stânga $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ se numeşte derivata la stânga a funcţiei f în c şi se notează cu $f'_-(c)$.
Analog, limita la dreapta $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ se numeşte derivata la dreapta a funcţiei f în c şi se notează cu $f'_+(c)$.
Evident, $f'(c)$ există dacă şi numai dacă $f'_-(c) = f'_+(c)$.

Teorema 33.1. *Dacă f este derivabilă (diferenţiabilă) în punctul c, atunci f este continuă în c.*

Demonstraţie. Definim funcţia:

$$F_c(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}, & \text{dacă } x \neq c \\ \\ f'(c), & \text{dacă } x = c \end{cases}$$

Deoarece f este derivabilă (diferenţiabilă) în c, $F_c(x) \underset{x \to c}{\longrightarrow} F_c(c)$ şi deci F_c este funcţie continuă în c. Întrucât

$$f(x) = f(c) + F_c(x) \cdot (x - c), \ \forall\, x \in A$$

rezultă că funcţia f este continuă în c. $\square$

Menţionăm că există funcţii continue care nu sunt diferenţiabile.

Tabelul următor conţine câteva funcţii elementare şi derivatele lor:

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

34 Reguli de derivabilitate.

Regula sumei: *Dacă f şi g sunt funcţii derivabile în c, atunci suma funcţiilor $f + g$ este derivabilă în c şi are loc egalitatea:*

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

Regula produsului: *Dacă f şi g sunt funcţii derivabile în c, atunci produsul funcţiilor $f \cdot g$ este funcţie derivabilă în c şi are loc egalitatea:*

$$(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c).$$

Regula reciprocă: *Dacă f este o funcţie care nu se anulează şi este derivabilă în c, atunci $\dfrac{1}{f}$ este derivabilă în c şi are loc egalitatea:*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = -\frac{f'(c)}{f^2(c)}.$$

Demonstraţie. ***(pentru regula produsului)***

Pentru $x \neq c$ avem:

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(c)}{x-c} &= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(c)\cdot g(c)}{x-c} = \\ &= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(c)+f(x)\cdot g(c)-f(c)\cdot g(c)}{x-c} = \\ &= \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(c)+f(x)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.\end{aligned}$$

Dacă $x \to c$ atunci,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \to f'(c) \quad \text{şi} \quad \frac{g(x)-g(c)}{x-c} \to g'(c).$$

Deci

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(c)}{x-c} \xrightarrow[x\to c]{} f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c).$$

□

Regula produsului şi a reciprocei pot fi combinate pentru a obţine regula câtului.

Regula câtului: *Dacă f şi g sunt funcţii derivabile în c şi $g(x) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în c şi are loc egalitatea:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)\cdot g(c)-f(c)\cdot g'(c)}{[g(c)]^2}.$$

Exemplu 34.1. Folosind regulile de mai sus să se calculeze pentru fiecare din următoarele funcţii derivata în punctele indicate:

i) $f(x) = x^2 + \sin x \quad x \in \mathbb{R}^1$;

ii) $f(x) = x^2 \cdot \sin x \quad x \in \mathbb{R}^1$;

iii) $f(x) = \text{tg } x \quad x \in \mathbb{R}^1$ şi $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, n număr întreg;

iv) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $x \neq 0$;

v) $f(x) = \sec x$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$;

vi) $f(x) = \text{cosec}$, $x \neq n\pi$;

vii) $f(x) = \text{tg } x$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$;

viii) $f(x) = \text{ctg } x$, $x \neq n\pi$.

Regula "cleştelui": *Fie f, g şi h trei funcţii care verifică relaţiile: $g(x) \le f(x) \le h(x)$, pentru orice x în vecinătatea lui c şi $g(c) = f(c) = h(c)$. Dacă funcţiile g şi h sunt derivabile în c, atunci şi f este derivabilă în c şi este verificată relaţia:*

$$f'(c) = g'(c) = h'(c).$$

Demonstraţie. Din inegalităţile date rezultă că pentru orice $x > c$ avem:

$$\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \le \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{h(x) - h(c)}{x - c}$$

şi pentru orice $x < c$ avem:

$$\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \ge \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge \frac{h(x) - h(c)}{x - c}$$

Rezultatul căutat se obţine din regula cleştelui pentru limite de funcţii dacă $g'(c) = h'(c)$. Pentru a demonstra această egalitate din urmă, fie:

$$G_c(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} & \text{dacă } x \ne c \\ g'(c) & \text{dacă } x = c \end{cases}$$

şi

$$H_c(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x) - h(c)}{x - c} & \text{dacă } x \ne c \\ h'(c) & \text{dacă } x = c. \end{cases}$$

Fie $k(x) = G_c(x) - H_c(x)$. Deoarece funcţiile g şi h sunt derivabile în c, funcţiile G_c şi H_c sunt continue în c. Astfel funcţia k este continuă în c. Din primele inegalităţi rezultă că dacă $x > c$, atunci $k(x) \le 0$, iar dacă $x < c$, atunci $k(x) \ge 0$. Aşadar, $k(c) = 0$ şi atunci $G_c(c) = H_c(c)$. Cu alte cuvinte, $g'(c) = h'(c)$. □

Exemplu 34.2. Funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x \ne 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

verifică inegalitatea: $g(x) \le f(x) \le h(x)$, dacă $h(x) = -x^2$ şi $g(x) = x^2$. Deoarece g şi h sunt derivabile în 0, iar derivata celor două funcţii în 0 este 0, din criteriul cleştelui se obţine că f este derivabilă în $x = 0$.
Folosind alte reguli se obţine că funcţia f este derivabilă pentru orice $x \ne 0$ şi în plus,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x \ne 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Se observă că $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nu există, deşi $f'(0)$ există, şi f' nu este continuă în 0.

Regula de derivare a funcţiei compuse: *Dacă functia f este derivabilă în c şi funcţia g este derivabilă în $b = f(c)$, atunci funcţia $g \circ f$ este derivabilă în c şi are loc egalitatea:*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Demonstraţie. Fie

$$F_c(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{dacă } x \neq c \\ \\ f'(c) & \text{dacă } x = c \end{cases}$$

şi

$$G_b(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{dacă } y \neq b \\ \\ g'(b) & \text{dacă } y = b. \end{cases}$$

Funcţia F_c este continuă în $x = c$ şi pentru orice x avem:

$$f(x) = f(c) + (x - c) \cdot F_c(x).$$

Funcţia G_b este continuă în $y = b$ şi pentru orice y avem:

$$g(y) = g(b) + (y - b) \cdot G_b(y).$$

Aşadar

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) =& g(f(x)) = g(y) = g(b) + (y - b) \cdot G_b(y) = \\ =& g(f(c)) + (f(x) - f(c)) \cdot G_b(f(x)) = \\ =& g(f(c)) + (x - c) \cdot F_c(x) \cdot G_b(f(x)).\end{aligned}$$

şi astfel

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} = F_c(x) \cdot G_b(f(x)).$$

Funcţia din membrul drept al egalităţii de mai sus este continuă în $x = c$. Deci

$$\lim_{x \to c} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} = F_c(c) \cdot G_b(f(c)) = f'(c) \cdot g'(f(c)),$$

□

Regula de derivare a funcţiilor compuse, în literatura anglo saxonă, este adesea numită "the chain rule". Formula de derivare a funcţiilor compuse este mai sugestivă în notaţia lui Leibniz. Dacă $\Delta x = h$ şi $\Delta y = f(x + h) - f(x)$, atunci

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Notaţia lui Leibniz pentru această limită este: $\dfrac{dy}{dx}$. Dacă se notează $y = g(u)$, unde $u = f(x)$, atunci $f'(x) = \dfrac{du}{dx}$ şi $g'(f(x)) = \dfrac{dy}{du}$ şi $(g \circ f)'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Regula de derivare poate fi scrisă astfel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Exemplu 34.3. Să se arate că $h(x) = \sin x^2$ este derivabilă.

Soluţie: Dacă considerăm funcţiile $g(x) = \sin x$ şi $f(x) = x^2$, atunci $h = g \circ f$. Deoarece f şi g sunt derivabile în orice punct, din regula de derivare a funcţiei compuse rezultă că funcţia h este derivabilă. În plus,

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2x\ \cos x.$$

Regula de derivare a inversei: *Presupunem că $f : A \to B$ este o funcţie bijectivă şi continuă, unde A şi B sunt intervale. Dacă f este derivabilă în $a \in A$ şi $f'(a) \neq 0$, atunci f^{-1} este derivabilă în $b = f(a)$ şi are loc egalitatea:*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demonstraţie. Pentru $a \in A$. Considerăm:

$$F_a(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{dacă } x \neq a \\ \\ f'(a) & \text{dacă } x = a. \end{cases}$$

F_a este continuă în $x = a$ şi pentru orice $x \in A$

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot F_a(x).$$

Dacă $b = f(a)$ şi $y = f(x)$ pentru $x \in A$ atunci:

$$F_a(x) = \frac{y - b}{x - a} \qquad \text{pentru } x \neq a.$$

Considerăm

$$G_b(y) = \frac{x - a}{y - b} \qquad \text{pentru } y \neq b$$

şi remarcăm că aceasta verifică:

$$G_b(y) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{F_a(x)} = \frac{1}{(F_a \circ f^{-1})(y)}, \quad y \neq b.$$

Deoarece funcţia f este bijectivă şi continuă, f^{-1} este continuă. Pe de altă parte F_a este continuă în $x = a$ şi astfel funcţia $F_a \circ f^{-1}$ este continuă în $y = b$. În plus au loc egalităţile:

$$(F_a \circ f^{-1})(b) = F_a(f^{-1}(b)) = F_a(a) = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0$$

Astfel rezultă că:

$$\frac{x - a}{y - b} = G_b(y) = \frac{1}{(F_a \circ f^{-1})(y)} \xrightarrow[y \to b]{} \frac{1}{(F_a \circ f^{-1})(b)}.$$

Cu alte cuvinte:

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}} \right)(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Consecinţa 34.1. *Dacă funcţia f este bijectivă şi derivabilă pe intervalul A şi $f'(a) \neq 0$ pentru orice $a \in A$ atunci funcţia inversă f^{-1} este derivabilă pe $f(A)$ şi are loc egalitatea $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

Exemplu 34.4. Funcţia $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definită prin relaţia $f(x) = x^2$ este o funcţie bijectivă. Inversa funcţiei f este $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Funcţia f este derivabilă pentru $x > 0$ şi $f'(x) = 2x \neq 0$. Folosind regula inversei, funcţia $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ este derivabilă şi are loc relaţia:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exemplu 34.5. Funcţia $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$ dată prin relaţia $g(x) = \sin x$ este o funcţie bijectivă, iar inversa ei este dată de relaţia $g^{-1}(x) = \arcsin x$. Funcţia g este derivabilă şi are loc relaţia:

$$(g' \circ g^{-1})(x) = \cos(\arcsin x) \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

Folosind regula inversei, funcţia g^{-1} este derivabilă şi are loc egalitatea:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

35 Extreme locale.

În această secţiune sunt prezentate rezultate referitoare la determinarea maximului şi minimului local pentru funcţii derivabile.

Definiţia 35.1. *O funcţie f are un maxim local în c dacă există un interval deschis I care conţine pe c astfel încât $f(x) \leq f(c)$ pentru orice $x \in I$. Dacă $f(x) \geq f(c)$ pentru fiecare $x \in I$, atunci f are un minim local în c.*

Teorema 35.1. [Teorema extremelor locale, teorema lui Fermat] *Dacă funcţia f este derivabilă în c şi are în c un minim sau maxim local, atunci $f'(c) = 0$.*

Demonstraţie. Presupunem că $x = c$ este un punct de minim local pentru f. Există un interval deschis I astfel încât $f(x) - f(c) \geq 0$ pentru orice $x \in I$. Dacă $x > c$, atunci $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ şi dacă $x < c$, atunci $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$. Astfel $f'_+(c) \geq 0$ şi $f'_-(c) \leq 0$. Dar $f'(c)$ există şi avem: $f'_+(c) = f'_-(c)$. Deci $f'(c) = 0$. □

Deşi condiţia $f'(c) = 0$ trebuie să fie îndeplinită într-un punct de maxim sau minim local, această condiţie nu este suficientă pentru a avea un extrem local în c. De exemplu, considerăm următoarea funcţie: $f(x) = x^3$. În punctul $x = 0$, avem $f'(0) = 0$, dar 0 nu este nici maxim local, nici minim local.

Exemplu 35.1. Să se delimiteze o mulţime în care se află punctele de minim şi maxim local pentru următoarea funcţie:

$$f(x) = x\,(x - 1)\,(x - 2)$$

36 Proprietăţi fundamentale ale funcţiilor derivabile.

În această secţiune sunt prezentate câteva proprietăţi fundamentale ale funcţiilor derivabile.

Teorema 36.1. [Teorema lui Rolle.] *Dacă o funcţie f este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi dacă $f(a) = f(b)$, atunci există cel puţin un $c \in (a, b)$, astfel încât $f'(c) = 0$.*

Demonstraţie. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a, b]$, ea este mărginită pe $[a, b]$ şi atinge o valoare maximă, notată $f(c_1)$, şi o valoare minimă, notată $f(c_2)$, c_1 şi c_2 situate în intervalul $[a, b]$.
Dacă $f(c_1) = f(c_2)$, atunci funcţia f este constantă pe $[a, b]$. De aici, rezultă $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in [a, b]$ şi teorema este demonstrată.
Dacă $f(c_1) \neq f(c_2)$, atunci cel puţin una din valorile c_1 şi c_2 este diferită de a şi b. Prin urmare, funcţia f are un maxim sau un minim local în intervalul (a, b) (sau pe amândouă).
Conform teoremei de extrem local f' este zero cel puţin într-un punct din intervalul (a, b). □

Teorema 36.2. [Teorema valorii medii, Lagrange.] *Dacă funcţia f este derivabilă pe intervalul (a, b) şi este continuă pe intervalul $[a, b]$, atunci există cel puţin o valoare $c \in (a, b)$, atfel încât:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $g(x) = f(x) - \lambda x$, unde $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Funcţia g este derivabilă pe (a, b) şi continuă pe intervalul $[a, b]$. λ a fost ales astfel încât $g(a) = g(b)$. Aplicând teorema lui Rolle, există cel puţin o valoare c, $c \in (a, b)$, astfel încât $g'(c) = 0$. Prin urmare, $f'(c) - \lambda = 0$ şi rezultă că $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Teorema 36.3. [Teorema de monotonie.] *Dacă funcţia f este derivabilă pe intervalul (a, b) şi este continuă pe intervalul $[a, b]$, atunci:*

(1) Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ atunci f este strict crescătoare pe intervalul $[a, b]$;

(2) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ atunci f este strict descrescătoare pe intervalul $[a, b]$;

(3) Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ atunci f este constantă pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Considerăm $x_1, x_2 \in [a, b]$, cu $x_1 < x_2$. Deoarece funcţia f îndeplineşte ipotezele din teorema de medie pe intervalul $[x_1, x_2]$ există c, $x_1 < c < x_2$ astfel încât să avem:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Deoarece $f'(c) > 0$, rezultă că $f(x_2) > f(x_1)$. Cu alte cuvinte, f este funcţie strict crescătoare pe intervalul $[a, b]$.

Demonstraţia pentru 2 şi 3 este similară. □

Observaţia 36.1. Teorema anterioară este folosită pentru determinarea şi clasificarea punctelor de extrem şi pentru stabilirea unor inegalităţi dintre funcţii.

Exemplu 36.1. Pentru funcţia $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ determinaţi punctele de extrem şi precizaţi natura lor: .

Soluţie: Funcţia f este derivabilă şi derivata ei este:

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (2 - x) \cdot x.$$

Punctele de extrem se află printre soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$. De aici rezultă că $x = 0$ şi $x = 2$ sunt eventual puncte de extrem. Deoarece $e^{-x} > 0$, avem următoarele situaţii: dacă $x < 0$ atunci $f'(x) < 0$, dacă $x \in (0, 2)$ atunci $f'(x) > 0$ şi dacă $x > 2$ atunci $f'(x) < 0$. Astfel funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$, este crescătoare pe intervalul $(0, 2)$ şi este descrescătoare din nou pe intervalul $(2, +\infty)$. Rezultă că $x = 0$ este un punct de minim local pentru funcţia f şi $x = 2$ este un punct de maxim local pentru funcţia f.

Exemplu 36.2. Arătaţi că $e^x \geq 1 + x$, pentru orice x.

Soluţie: Considerăm funcţia $f(x) = e^x - 1 - x$. Funcţia f este derivabilă şi $f'(x) = e^x - 1$.
Deoarece $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$ rezultă că $f(x) > f(0) = 0$ pentru $x > 0$.
Deoarece $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$ rezultă că $f(x) > f(0) = 0$ pentru $x < 0$.
În final se obţine că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^1$, adică $e^x \geq 1 + x$.

Rezultatul următor este greu de interpretat geometric, dar este necesar pentru a demonstra regula lui l′Hôspital. Aceasta este o regulă foarte potrivită pentru determinarea limitelor de forma: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, unde $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Teorema 36.4. [Teorema de medie a lui Cauchy.] *Dacă f şi g sunt funcţii derivabile pe intervalul (a, b) sunt continue pe intervalul $[a, b]$ şi $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci există cel puţin o valoare $c \in (a, b)$, astfel încât:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demonstraţie. Observăm că $g(a) \neq g(b)$. În caz contrar aplicând teorema lui Rolle pentru funcţia g în intervalul $[a, b]$ se obţine că funcţia g' se anulează într-un punct din intervalul (a, b) ceea ce contravine ipotezei.

Considerăm funcţia $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$, unde $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.
Funcţia h îndeplineşte ipotezele din teorema lui Rolle. Aşadar există $c \in (a, b)$, astfel încât $h'(c) = 0$, ceea ce implică: $f'(c) = \lambda \cdot g'(c)$. □

Teorema 36.5. [Regula lui l′Hôspital, versiunea A] *Fie f şi g două funcţii care îndeplinesc ipotezele teoremei de medie a lui Cauchy şi fie $x_0 \in (a,b)$. Dacă $f(x_0) = g(x_0) = 0$, atunci*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cu condiţia că limita din dreapta există.

Demonstraţie. Aplicând teorema de media a lui Cauchy pentru funcţiile f şi g pe intervalul $[x_0, x]$ unde $x_0 < x \leq b$, rezultă că există c, $x_0 < c < x$ astfel încât:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De aici rezultă că:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cu condiţia că limita din dreapta există.
Un rezultat similar se obţine pentru intervalul $[x, x_0]$, unde $a \leq x < x_0$:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cu condiţia ca limita din dreapta există.

Regula rezultă imediat. □

Exemplu 36.3. Să se verifice că:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Soluţie: Funcţiile $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = x$ îndeplinesc ipotezele regulei lui l′Hôspital. În plus,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Exemplu 36.4. Să se verifice că:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Soluţie: Folosind regula compunerii pentru limite de funcţii se obţine:

$$\ln\left(\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\ln(1 + x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

iar cu regula lui l′Hôspital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x + 1} = 1.$$

Deci

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Regula lui l'Hôspital poate fi folosită pentru evaluarea multor limite nedeterminate, odată ce acestea sunt exprimate ca şi limite de câturi de funcţii, cu condiţia ca $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ să se poată evalua.

Adesea, limita de mai sus este tot o nedeterminare (adică $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$) şi s-ar putea aplica din nou regula lui l'Hôspital, dar trebuie ca funcţiile f' şi g' să fie şi ele derivabile.

37 Derivabilitatea (diferenţiabilitatea) de ordin superior.

Definiţia 37.1. *Dacă f este o funcţie derivabilă şi derivata sa f' este la rândul ei o funcţie derivabilă, atunci se spune că funcţia f este de două ori derivabilă, iar derivata lui f' se numeşte derivata de ordinul al doilea a lui f şi se notează: f'' sau $f^{(2)}$.*

Definiţia 37.2. *În general, f este derivabilă de n ori dacă f este derivabilă de $(n-1)$ ori şi derivata de ordinul $n-1$ este o funcţie derivabilă.*
Derivata derivatei de ordinul $n-1$ se numeşte derivata de ordinul n a lui f şi se notează cu $f^{(n)}$. Dacă, în plus $f^{(n)}$ este o funcţie continuă, atunci se spune că funcţia f are derivata de ordinul n continuă (este de clasă $\mathcal{C}^n$)

Exemplu 37.1.

1. Dacă $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, atunci

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} \cdot x^{m-n} & \text{pentru } n \leq m \\ 0 & \text{pentru } n > m. \end{cases}$$

2. Dacă $f(x) = \sin x$, atunci $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ pentru $n \geq 1$.

3. Dacă $f(x) = \ln x$, atunci $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$ pentru $n \geq 1$.

Derivatele de ordin superior pentru un produs de funcţii f şi g sunt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \tag{37.1}$$

$$(f \cdot g)^{(2)} = f^{(2)} \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g^{(2)} \tag{37.2}$$

$$(f \cdot g)^{(3)} = f^{(3)} \cdot g + 3 \cdot f^{(2)} \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g^{(2)} + f \cdot g^{(3)}. \tag{37.3}$$

Formula ce urmează este des folosită şi poate fi demonstrată prin inducţie după n.

Teorema 37.1. [Formula lui Leibnitz.] *Dacă f şi g sunt funcţii derivabile de n ori, atunci $h = f \cdot g$ este o funcţie derivabilă de n-ori şi este verificată relaţia:*

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

Teorema 37.2. [Regula lui l'Hôspital, versiunea B.] *Fie f şi g două funcţii care au derivatele de ordinul n continue pe intervalul (a,b), iar x_0 cu proprietatea $a < x_0 < b$. Dacă*

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \textit{pentru } 0 \le k \le n-1$$

şi

$$g^{(n)}(x_0) \neq 0$$

atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Exemplu 37.2. Să se verifice că:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

şi

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) = 0.$$

38 Polinoame Taylor.

Considerăm o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu raza de convergenţă $R > 0$. Fie $f(x)$ suma seriei pentru $|x| < R$.
Se poate demonstra că f este o funcţie derivabilă şi derivata verifică egalitatea:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \text{pentru } |x| < R.$$

Derivata de ordin k verifică:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot x^{n-k} \quad \text{pentru } |x| < R.$$

Dacă $x = 0$, atunci

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{pentru } k = 1, 2, \ldots$$

Aşadar coeficientul a_n al lui x^n în seria de puteri este $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ unde $f(x)$ este suma seriei de puteri. Deci:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \quad \text{pentru } |x| < R.$$

Pentru valori mici ale lui x, suma $f(x)$ poate fi aproximată cu polinomul de gradul N:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!} x^N$$

în care N este un număr natural oarecare.

În această secţiune vom analiza cât de bine aproximează acest polinom funcţia $f(x)$, în cazul în care $f(x)$ nu este neapărat suma unei serii de puteri.

Definiţia 38.1. *Fie f o funcţie derivabilă de n-ori în 0. Polinomul Taylor de gradul n pentru f în 0 este definit de egalitatea:*

$$T_n f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Exemplu 38.1. Fie $f(x) = e^x$. Pentru $k = 1, 2, \ldots$, avem $f^{(k)}(0) = 1$. Astfel

$$\begin{aligned} T_0 f(x) =& 1 \\ T_1 f(x) =& 1 + x \\ T_2 f(x) =& 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Primul rezultat se obţine din estimarea diferenţei între $f(b)$, valoarea funcţiei date în $x = b$ şi $T_n f(b)$, valoarea polinomului Taylor de gradul n în $x = b$.

Teorema 38.1. [Prima teoremă a restului] *Dacă f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^{(n+1)}$ pe un interval deschis ce conţine punctele 0 şi b, atunci diferenţa dintre f şi $T_n f$ în punctul $x = b$ este dată de:*

$$f(b) - T_n f(b) = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c)$$

în care $c \in (0, b)$.

Demonstraţie. Pentru simplificare, vom presupune că $b > 0$. Dacă

$$h_n(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k \qquad x \in [0, b].$$

atunci $h_n(b) = 0$ şi $h_n(0) = f(b) - T_n f(b)$. Dacă

$$g(x) = h_n(x) - \left(\frac{b - x}{b}\right)^{n+1} \cdot h_n(0) \qquad x \in [0, b].$$

atunci g este continuă pe intervalul $[0, b]$, este derivabilă pe intervalul $(0, b)$ şi este verificată relaţia $g(0) = g(b) = 0$. Conform teoremei lui Rolle există c între 0 şi b astfel încât $g'(c) = 0$. După un calcul simplu se obţine

$$h_n'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n$$

Astfel

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n + \frac{(n+1)(b - x)^n}{b^{n+1}} \cdot h_n(0)$$

şi

$$0 = g'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b - c)^n + \frac{(n+1)(b - c)^n}{b^{n+1}} \cdot h_n(0)$$

obţinându-se

$$h_n(0) = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

$\square$

Diferenţa $f(b) - T_n f(b)$ se notează cu $R_n f(b)$ şi se numeşte restul aproximării în $x = b$. Astfel:

$$f(b) = T_n f(b) + R_n f(b)$$

şi eroarea de aproximare a lui $f(b)$ prin polinomul $T_n f(b)$ este dată de restul aproximării $R_n f(b)$. Deoarece $f^{(n+1)}$ este continuă pe un interval închis ce conţine punctele 0 şi b, ea este mărginită pe acest interval. Există deci un număr M astfel încât $|f^{(n+1)}(c)| \leq M$ şi

$$|R_n f(b)| \leq \left| \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot M.$$

Astfel, pentru un n fixat, restul aproximării poate fi mic pentru valori ale lui b apropiate de zero. Cu alte cuvinte, polinoamele Taylor reprezintă o bună aproximare a funcţiilor în vecinătatea lui $x = 0$. Următorul exemplu ilustrează acest fapt:

Exemplu 38.2. Dacă $f(x) = \sin x$, atunci

$$T_7 f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \qquad R_7 f(x) = \frac{x^8}{8!}(-\sin c)$$

pentru c între 0 şi x. Conform primei teoreme a restului se obţine:

$$R_7 f(0.1) \leq \frac{0.1^8}{8!} = 2.48 \cdot 10^{-13}.$$

Vom arăta în continuare cum polinoamele Taylor pot fi utilizate pentru a dezvolta în serie de puteri funcţia f care este indefinit derivabilă pe un interval deschis ce conţine pe 0 şi pe x. Pentru x avem:

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x).$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} T_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \quad \text{pentru } |x| < R$$

unde R este raza de convergenţă a seriei de puteri.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} R_n f(x) = 0$ pentru $|x| < R' < R$, pentru o anumită valoare R', atunci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \quad \text{pentru } |x| < R'.$$

Această serie de puteri este numită serie McLaurin pentru $f(x)$.

Exemplu 38.3. Dezvoltarea în serie McLaurin a funcţiei $f(x) = e^x$.

Soluţie: În primul rând

$$T_n f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

şi $R_n f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$ unde $c \in (0, x)$. Seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, conform criteriului raportului este absolut convergentă pentru orice număr real x

$$\lim_{n\to\infty} T_n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Convergenţa la zero a termenului general $\dfrac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ implică

$$|R_n f(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \right| \to 0 \quad \text{pentru } n \to \infty$$

oricare ar fi x fixat. Deci, pentru x fixat, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n f(x) = 0$, şi rezultă

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

În mod asemănător, seriile de puteri pot fi generate pentru funcţiile standard. În fiecare caz, suma seriei de puteri este $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x)$ şi egalitatea dintre funcţie şi suma seriei este valabilă pentru acele valori x pentru care:

a) seria de puteri determinată converge şi

b) restul $R_n f(x) \to 0$ pentru $n \to \infty$.

În alcătuirea următoarei liste, dificultatea constă în stabilirea condiţiei de la punctul b):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{38.1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{38.2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{38.3}$$

$$(1+x)^t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t \cdot (t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n+1)}{n!} x^n \quad t \notin \mathbb{N},\ x \in (-1, 1) \tag{38.4}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} \quad -1 < x \leq 1. \tag{38.5}$$

Forma restului determinată în prima teoremă a restului se numeşte formă Lagrange.

Primii câţiva termeni ai seriei McLaurin pentru o funcţie f dată dau o bună aproximare a lui $f(x)$ în vecinătatea lui 0.

Dar care este aproximarea lui $f(x)$ pentru x în vecinătatea unui număr real a? În acest caz polinoamele trebuie considerate ca puteri ale lui $(x-a)$ şi nu puteri ale lui x.

Definiţia 38.2. *Fie f o funcţie de n-ori derivabilă pe un interval deschis ce conţine pe a, a număr real fixat. Polinomul Taylor de gradul n pentru f în a este definit astfel:*

$$T_{n,a}f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Prima teoremă a restului poate fi acum generalizată.

Teorema 38.2. Teorema lui Taylor *Dacă f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^{(n+1)}$ pe un interval deschis ce conţine punctele a şi b, atunci diferenţa dintre f şi $T_{n,a}f$ în b este dată de relaţia:*

$$f(b) - T_{n,a}f(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c)$$

pentru $c \in (a,b)$.

Demonstraţie. Pentru fiecare t între a şi b avem:

$$f(b) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(b-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-t)^n + F(t)$$

unde

$$F(t) = R_{n,t}f(b) = f(b) - T_{n,t}f(b).$$

Derivând în raport cu t se obţine:

$$\begin{aligned} 0 =& f'(t) + \left(-f'(t) + \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(b-t)\right) + \left(-\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(b-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(b-t)^2\right) + \ldots \\ &\ldots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\right) + F'(t). \end{aligned}$$

Reducând termenii asemenea se obţine egalitatea:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n.$$

Conform teoremei de medie a lui Cauchy pentru funcţiile F şi G pe intervalul mărginit de punctele a şi b (unde $G(t) = (b-t)^{n+1}$), există un număr c între a şi b astfel încât:

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n}{-(n+1)(b-c)^n}.$$

Deci

$$\frac{-(f(b)-T_{n,a}f(b))}{-(b-a)^{n+1}} = \frac{\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n}{(n+1)(b-c)^n}$$

sau

$$f(b) - T_{n,a}f(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c).$$

□

Eroarea de aproximare a lui $f(b)$ prin polinomul $T_{n,a}f(b)$ este restul aproximării::

$$R_{n,a}f(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$$

în care $c \in (a,b)$. Aproximarea este bună când b este aproape de a.

Seriile de puteri pot fi generate ca serii de puteri ale lui $(x-a)$,numite serii Taylor, pentru funcţii în a. Egalitatea dintre funcţie şi suma seriei este valabilă pentru acele valori x pentru care:

a) seria de puteri determinată este convergentă şi

b) $R_{n,a}f(x) \to 0$ pentru $n \to \infty$.

39 Teorema de clasificare a punctelor de extrem.

Formula lui Taylor, întâlnită des în analiza numerică şi prezentată în continuare, se foloseşte la investigarea punctelor de extrem.

În formula lui Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n,a}f(x) + R_{n,a}f(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c) \end{aligned}$$

c este între a şi x, $c \in (a,x)$ şi dacă $x - a = h$, atunci c este între a şi $a+h$ şi se scrie astfel $c = a + \theta \cdot h$ cu $\theta \in (0,1)$. Rezultă:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(a+\theta \cdot h)$$

cu $\theta \in (0,1)$.

Această expresie subliniază că valoarea lui f în $a+h$ este determinată de valoarea lui f şi a derivatelor în a, iar θ reprezintă gradul de nedeterminare.

Atunci când se investighează extremele funcţiei f care are punctul staţionar $x = a$ (adică $f'(a) = 0$), este necesară determinarea semnului expresiei $f(a+h) - f(a)$ pentru valori mici ale lui h. Aceasta se poate face folosind expresia precedentă şi se obţine următorul rezultat.

Teorema 39.1. Teorema de clasificare a punctelor de extrem *Dacă f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^{(n+1)}$ într-o vecinătate a lui a şi $f^{(k)}(a) = 0$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ (în particular $f'(a) = 0$, deci $x = a$ este un punct staţionar pentru f) şi $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ atunci:*

(1) dacă $n+1$ este par şi $f^{(n+1)}(a) > 0$, atunci f admite un minim local în $x = a$.

(2) dacă $n+1$ este par şi $f^{(n+1)}(a) < 0$, atunci f admite un maxim local în $x = a$.

(3) dacă $n+1$ este impar, atunci f nu admite nici minim local, nici maxim local în $x = a$.

Demonstraţie. Deoarece $f^{(k)}(a) = 0$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, obţinem că

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$$

unde $0 < \theta < 1$. Dar $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ şi $f^{(n+1)}$ este continuă, deci există $\delta > 0$ astfel încât $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ pentru $|x - a| < \delta$. Aşadar pentru orice h care satisface $|h| < \delta$, $f^{(n+1)}(a + \theta h)$ are acelaşi semn ca şi $f^{(n+1)}(a)$, deci $f(a+h) - f(a)$ are acelaşi semn ca şi $h^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(a)$ pentru orice h cu $|h| < \delta$.

(1) Dacă $n+1$ este par şi $f^{(n+1)}(a) > 0$, atunci $f(a+h) - f(a) \geq 0$ pe un interval deschis $(a - \delta, a + \delta)$. Deci $x = a$ este un minim local pentru f.

(2) Dacă $n+1$ este par şi $f^{(n+1)}(a) < 0$, atunci $f(a+h) - f(a) \leq 0$ pe un interval deschis $(a - \delta, a + \delta)$. Deci $x = a$ este un maxim local pentru f.

(3) Dacă $n+1$ este impar, semnul lui $f(a+h) - f(a)$ se schimbă după semnul lui h. Se spune că $x = a$ este un punct orizontal de inflexiune. □

Exemplu 39.1. Să se determine natura punctelor staţionare:

$$f(x) = x^6 - 4x^4.$$

40 Integrala Riemann-Darboux.

Definiţia 40.1. *O partiţie P a segmentului $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este o mulţime finită de puncte $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ cu proprietatea:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Fie o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită pe $[a, b]$ şi m, M astfel încât

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a, b]$$

Funcţia f este mărginită pe fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ şi notăm:

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Definiţia 40.2. *Suma superioară Darboux a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este, prin definiţie, numărul:*

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Definiţia 40.3. *Suma inferioară Darboux a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este, prin definiţie, numărul:*

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

Propoziţia 40.1. *Oricare ar fi partiţia P a segmentului $[a, b]$, au loc următoarele inegalităţi:*

$$m(b-a) \leq L_f(P) \leq U_f(P) \leq M(b-a)$$

Demonstraţie.

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) = M \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a)$$

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) = m \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = m(b-a)$$

Inegalitatea $L_f(P) \leq U_f(P)$ este evidentă. □

Remarca 40.1. Propoziţia 40.1 arată că mulţimile:

$$L_f = \{L_f(P) | P - \text{ partiţie a segmentului } [a, b]\}$$

$$U_f = \{U_f(P) | P - \text{ partiţie a segmentului } [a, b]\}$$

sunt mărginite.

Fie $\mathcal{L}_f = \sup L_f$ şi $\mathcal{U}_f = \inf U_f$.

Propoziţia 40.2. *Are loc inegalitatea:*

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

Demonstraţie. Fie P o partiţie a segmentului $[a, b]$ şi P' partiţia $P' = P \cup \{y\}$ unde $x_{i-1} < y < x_i$ pentru un anumit i, $1 \leq i \leq n$. Cu alte cuvinte, P' este obţinută prin adăugarea unui punct y la punctele partiţiei P.

Vom arăta acum că au loc următoarele inegalităţi:

$$L_f(P) \leq L_f(P') \quad \text{şi} \quad U_f(P') \leq U_f(P)$$

Considerăm numerele $M_i' = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, y]\}$ şi $M_i'' = \sup\{f(x) | x \in [y, x_i]\}$ şi remarcăm inegalităţile imediate $M_i' \leq M_i$ şi $M_i'' \leq M_i$.

Ţinând seama de acestea, deducem:

$$\begin{aligned} U_f(P') &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + M_i'(y - x_{i-1}) + M_i''(x_i - y) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + M_i(y - x_{i-1}) + M_i(x_i - y) + \sum_{j=i+1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}) = U_f(P) \end{aligned}$$

Într-un mod asemănător se arată că are loc şi inegalitatea $L_f(P) \leq L_f(P')$.

Se poate acum afirma că, dacă $P'' = P \cup \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ unde y_i sunt numere distincte în $[a, b]$, atunci au loc inegalităţile:

$$L_f(P) \leq L_f(P'') \quad \text{şi} \quad U_f(P'') \leq U_f(P)$$

Considerăm acum două partiţii P_1 şi P_2 ale segmentului $[a,b]$ şi notăm cu P_3 partiţia $P_3 = P_1 \cup P_2$. Pe baza celor arătate avem: $L_f(P_1) \le L_f(P_3)$ şi $U_f(P_3) \le U_f(P_2)$ şi ţinând seama de inegalitatea $L_f(P_3) \le U_f(P_3)$ deducem inegalitatea:

$$L_f(P_1) \le U_f(P_2)$$

Cu alte cuvinte, orice sumă inferioară este mai mică decât orice sumă superioară. De aici rezultă $\mathcal{L}_f \le \mathcal{U}_f$. □

Definiţia 40.4. *O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a,b]$ dacă $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$. Această valoare comună se notează cu*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

şi se numeşte integrala Riemann-Darboux a funcţiei f pe segmentul $[a,b]$.

Exemplu 40.1. *Funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[0,1]$ şi $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.*
Într-adevăr, pentru $n \in \mathbb{N}$, fie $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\}$. Avem:

$$U_f(P_n) = \frac{n+1}{2n} \quad \text{şi} \quad L_f(P_n) = \frac{n-1}{2n}$$

şi astfel

$$\frac{n-1}{2n} \le \mathcal{L}_f \le \mathcal{U}_f \le \frac{n+1}{2n}$$

Pentru $n \to +\infty$ rezultă $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \frac{1}{2}$.

Exemplu 40.2. *Funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ dacă x este raţional şi $f(x) = 0$ dacă x este iraţional, nu este integrabilă Riemann-Darboux pe $[0,1]$.*
Într-adevăr oricare ar fi partiţia P avem $L_f(P) = 0$ şi $U_f(P) = 1$. Prin urmare, $\mathcal{L}_f = 0$ şi $\mathcal{U}_f = 1$, şi astfel $\mathcal{L}_f \ne \mathcal{U}_f$.

Comentariu: Această definiţie a integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ este doar una din multiplele definiţii existente (de exemplu, un alt tip de integrală este integrala Lebesque). În cazul funcţiilor continue însă, aceste integrale coincid.

41 Proprietăţi ale integralei Riemann-Darboux.

Teorema 41.1. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii mărginite pe segmentul $[a,b]$. Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile Riemann-Darboux pe $[a,b]$ atunci toate integralele care apar în relaţiile următoare există şi relaţiile sunt adevărate:*

(1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \forall c \in (a, b)$

(3) dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ *atunci* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(4) $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b | f(x) |\, dx$

Demonstraţie. (1) Demonstraţia egalităţii *(1)* se reduce la demonstrarea egalităţilor:

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{şi} \quad \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Faptul că egalitatea $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ este adevărată pentru orice $\alpha \geq 0$ rezultă din egalităţile $L_{\alpha f}(P) = \alpha L_f(P)$ şi $U_{\alpha f}(P) = \alpha U_f(P)$, valabile pentru orice $\alpha \geq 0$ şi orice partiţie P a lui $[a, b]$.

Faptul că egalitatea $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ este adevărată pentru orice $\alpha < 0$ rezultă din egalităţile $L_{-f}(P) = -U_f(P)$ şi $U_{-f}(P) = -L_f(P)$, valabile pentru orice partiţie P a lui $[a, b]$.

Faptul că egalitatea $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ este adevărată se obţine observând că pentru orice partiţie P a lui $[a, b]$ are loc:

$$L_f(P) + L_g(P) \leq L_{f+g}(P) \leq U_{f+g}(P) \leq U_f(P) + U_g(P)$$

din care rezultă inegalităţile:

$$\mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g \leq \mathcal{L}_{f+g} \leq \mathcal{U}_{f+g} \leq \mathcal{U}_f + \mathcal{U}_g$$

Aceste inegalităţi împreună cu egalităţile:

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{şi} \quad \mathcal{L}_g = \mathcal{U}_g = \int_a^b g(x)\,dx$$

demonstrează că are loc:

$$\mathcal{L}_{f+g} = \mathcal{U}_{f+g} = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) Pentru demonstraţia egalităţii *(2)* fie P_1 şi P_2 partiţii ale lui $[a, c]$, respectiv $[c, b]$. Reuniunea $P = P_1 \cup P_2$ este o partiţie a lui $[a, b]$ şi avem:

$$L_f(P) = L_f(P_1) + L_f(P_2)$$

Considerăm numerele:

$$\mathcal{L}_f^1 = \sup\{L_f(P_1) \mid P_1 \text{ este partiţie a lui } \quad \text{[a,c]}\}$$

$$\mathcal{L}_f^2 = \sup\{L_f(P_2) \mid P_2 \text{ este partiţie a lui } \quad \text{[c,b]}\}$$

Întrucât $L_f(P) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (din definiţie) rezultă că are loc inegalitatea:

$$L_f(P_1) + L_f(P_2) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

De aici rezultă inegalitatea $L_f(P_1) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - L_f(P_2)$, din care se obţine în continuare inegalitatea:

$$\mathcal{L}_f^1 \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - L_f(P_2)$$

Din această inegalitate rezultă succesiv:

$$\begin{aligned} L_f(P_2) &\leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \mathcal{L}_f^1 \\ \mathcal{L}_f^2 &\leq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \mathcal{L}_f^1 \\ \mathcal{L}_f^1 + \mathcal{L}_f^2 &\leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Considerăm acum sumele superioare şi observăm că avem:

$$U_f(P) = U_f(P_1) + U_f(P_2)$$

În continuare considerăm:

$$\mathcal{U}_f^1 = \inf\{U_f(P_1) \mid P_1 \text{ este partiţie a lui } \text{[a,c]}\}$$

$$\mathcal{U}_f^2 = \inf\{U_f(P_2) \mid P_2 \text{ este partiţie a lui } \text{[c,b]}\}$$

Întrucât $U_f(P) \geq \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (din definiţia integralei) rezultă

$$U_f(P_1) + U_f(P_2) \geq \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

De aici se obţine succesiv:

$$\begin{aligned}
U_f(P_1) &\geq \int\limits_a^b f(x)\,dx - U_f(P_2) \\
\mathcal{U}_f^1 &\geq \int\limits_a^b f(x)\,dx - U_f(P_2) \\
U_f(P_2) &\geq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \mathcal{U}_f^1 \\
\mathcal{U}_f^2 &\geq \int\limits_a^b f(x)\,dx - \mathcal{U}_f^1 \\
\mathcal{U}_f^1 + \mathcal{U}_f^2 &\geq \int\limits_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Am obţinut în acest fel inegalităţile:

$$\mathcal{L}_f^1 + \mathcal{L}_f^2 \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \mathcal{U}_f^1 + \mathcal{U}_f^2$$

Întrucât f este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$, pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate alege P astfel încât $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$.
Alegând P_1 şi P_2 astfel încât $P = P_1 \cup P_2$ să satisfacă condiţia de sus, obţinem:

$$\begin{aligned}
U_f(P_1) - L_f(P_1) + U_f(P_2) - L_f(P_2) &= U_f(P_1) + U_f(P_2) - (L_f(P_1) + L_f(P_2)) = \\
&= U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon
\end{aligned}$$

De aici rezultă inegalităţile:

$$0 \leq U_f(P_1) - L_f(P_1) < \varepsilon \quad \text{şi} \quad 0 \leq U_f(P_2) - L_f(P_2) < \varepsilon$$

Aceste inegalităţi demonstrează că avem:

$$\mathcal{L}_f^1 = \mathcal{U}_f^1 \quad \text{şi} \quad \mathcal{L}_f^2 = \mathcal{U}_f^2$$

adică f este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, c]$ şi $[c, b]$ şi are loc egalitatea *(2.2)*.

(3) Pentru a demonstra *(3)* este suficient să se arate că dacă $f(x) \geq 0$ pe $[a, b]$ atunci are loc :

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

Faptul că inegalitatea $\int\limits_a^b f(x)\, dx \geq 0$ este adevărată rezultă din inegalităţile:

$$0 \leq L_f(P) \leq U_f(P)$$

valabile pentru orice partiţie P a lui $[a, b]$.

(4) Pentru a arăta *(4)* demonstrăm în primul rând că dacă f este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$, atunci funcţia $|f|$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$. Pentru aceasta introducem funcţiile $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$, definite astfel:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad f(x) \leq 0 \end{cases}$$

şi

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{dacă} \quad f(x) \leq 0 \end{cases}$$

şi remarcăm următoarele egalităţi:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{şi} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

Arătăm în continuare că dacă funcţia f este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$, atunci funcţiile $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann-Darboux pe $[a, b]$. Mărginirea funcţiilor f^+ şi f^- este evidentă.
Fie P o partiţie a segmentului $[a, b]$. În cazul funcţiei f^+ notăm:

$$m_i^+ = \inf\{f^+(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{şi} \quad M_i^+ = \sup\{f^+(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

şi observăm că au loc următoarele inegalităţi:

$$M_i^+ - m_i^+ \leq M_i - m_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

unde:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{şi} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Rezultă de aici că are loc inegalitatea:

$$0 \leq U_{f^+}(P) - L_{f^+}(P) \leq U_f(P) - L_f(P)$$

pentru orice partiţie P.
De aici rezultă integrabilitatea Riemann-Darboux a funcţiei f^+ pe segmentul $[a, b]$. Integrabilitatea Riemann-Darboux a funcţiei f^- pe segmentul $[a, b]$ se arată la fel. În baza afirmaţiei *(1)* şi a egalităţii $|f| = f^+ + f^-$ rezultă că funcţia $|f|$ este

integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$.
Pentru a obţine inegalitatea *(4)* ţinem seama de inegalităţile:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

şi folosind *(3)* deducem inegalităţile:

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

care demonstrează *(4)*.

□

Remarca 41.1. Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[c, d] \subset [a, b]$.
Mai mult, dacă $a = c_0 < c_1 < ... < c_n = b$, atunci are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\, dx$$

Remarca 41.2. Prin definiţie,

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Remarca 41.3. Dacă $a > b$, atunci, prin definiţie

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

42 Clase de funcţii integrabile Riemann-Darboux.

Teorema 42.1. *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$.*

Demonstraţie. Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P astfel încât $U_f(P) - L_f(P) \leq \varepsilon$.
Considerăm în acest scop un număr $\varepsilon > 0$ şi numărul $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Dacă pentru orice $x \in [a, b]$ avem:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon'$$

atunci considerăm partiţia $P = \{x_0, x_1\}$ cu $x_0 = a$ şi $x_1 = b$ şi verificăm că $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$.
Dacă însă mulţimea S definită prin:

$$S = \{x \in [a,b] | \ |f(x) - f(a)| = \varepsilon'\}$$

este nevidă atunci considerăm punctul $x_1 = \inf S$. Acesta este primul element al segmentului $[a,b]$ care are proprietatea $|f(x) - f(a)| = \varepsilon'$.
Dacă $x_1 = \inf S = b$ atunci considerăm partiţia $P = \{x_0, x_1\}$ cu $x_0 = a$ şi $x_1 = b$ şi verificăm că $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$.
Dacă $x_1 = \inf S < b$ atunci se consideră x_2 primul element din $[x_1, b]$ pentru care $|f(x) - f(x_1)| = \varepsilon'$.
Dacă $x_2 = \inf\{x \in [x_1, b] || f(x) - f(x_1)| = \varepsilon'\} = b$ atunci considerăm partiţia $P = \{x_0, x_1, x_2\}$ cu $x_0 = a, x_1 = \inf S$ şi $x_2 = b$ şi verificăm că $U_f(P) - L_f(P) \leq \varepsilon$.
Dacă $x_2 = \inf\{x \in [x_1, b] || f(x) - f(x_1)| = \varepsilon'\} < b$ atunci se consideră x_3 primul element din $[x_2, b]$ pentru care $|f(x) - f(x_2)| = \varepsilon'$ şi se continuă procesul.
Trebuie să arătăm că acest proces nu poate fi continuat la nesfârşit.
Să presupunem prin absurd că în acest fel se obţine un şir infinit (x_n). Este clar din construcţie că şirul (x_n) este crescător şi mărginit. Prin urmare (x_n) este convergent la un punct $x \in [a,b]$. Deoarece f este funcţie continuă rezultă că $f(x_n) \to f(x)$ şi $f(x_{n-1}) \to f(x)$. Pe de altă parte, din construcţie avem $|f(x_n) - f(x_{n-1})| = \varepsilon'$, ceea ce este în contradicţie cu $f(x_n) - f(x_{n-1}) \to 0$.
Rezultă astfel că şirul (x_n) este finit, adică există N astfel încât $P = \{x_0, x_1, ..., x_N\}$ este o partiţie a lui $[a,b]$ pentru care $|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \varepsilon', i = 1, 2, ..., N$.
Pentru această partiţie P avem:

$$M_i - m_i \leq 2\varepsilon' \qquad i = 1, 2, ..., N$$

Rezultă:

$$U_f(P) - L_f(P) = \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 2\varepsilon'(b-a) = \varepsilon$$

Folosim această inegalitate şi obţinem succesiv:

$$\mathcal{L}_f \geq L_f(P) \geq U_f(P) - \varepsilon \geq \mathcal{U}_f - \varepsilon$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ este oarecare, rezultă $\mathcal{L}_f \geq \mathcal{U}_f$. Această inegalitate împreună cu inegalitatea $\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$ implică $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$. Rezultă astfel că funcţia continuă f este integrabilă Riemann-Darboux pe segmentul $[a,b]$. □

Definiţia 42.1. *O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se zice continuă pe porţiuni dacă există o partiţie $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ a segmentului $[a,b]$ şi funcţiile continue $f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$ astfel încât $f(x) = f_i(x), \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$.*

Teorema 42.2. *O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe porţiuni este integrabilă Riemann-Darboux şi are loc egalitatea:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\, dx$$

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că dacă o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ are proprietatea $f(x) = g(x), \forall x \in (\alpha, \beta) \subset [a, b]$ şi $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este integrabilă Riemann-Darboux pe $[\alpha, \beta]$ şi are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} g(y)\,dy$$

Pentru aceasta considerăm o partiţie $P = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ a segmentului $[\alpha, \beta]$, $\alpha = y_0 < y_1 < ... < y_n = \beta$ şi scriem:

$$L_f(P) = L_g(P) + (m_1^f - m_1^g) \cdot (y_1 - y_0) + (m_n^f - m_n^g) \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$U_f(P) = U_g(P) + (M_1^f - M_1^g) \cdot (y_1 - y_0) + (M_n^f - M_n^g) \cdot (y_n - y_{n-1})$$

unde am notat:

$$\begin{array}{ll} m_1^f = \inf\{f(y)|y \in [y_0, y_1]\} & m_1^g = \inf\{g(y)|y \in [y_0, y_1]\} \\ m_n^f = \inf\{f(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} & m_n^g = \inf\{g(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} \\ M_1^f = \sup\{f(y)|y \in [y_0, y_1]\} & M_1^g = \sup\{g(y)|y \in [y_0, y_1]\} \\ M_n^f = \sup\{f(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} & M_n^g = \inf\{g(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} \end{array}$$

Prin scădere se obţine:

$$\begin{array}{rcl} U_f(P) - L_f(P) & = & U_g(P) - L_g(P) + (M_1^f - m_1^f + m_1^g - M_1^g)(y_1 - y_0) + \\ & + & (M_n^f - m_n^f + m_n^g - M_n^g)(y_n - y_{n-1}) \leq \\ & \leq & U_g(P) - L_g(P) + [(M^f - m^f) + (M^g - m^g)](y_1 - y_0 + y_n - y_{n-1}) \end{array}$$

Alegând $\varepsilon > 0$ şi P astfel încât $U_g(P) - L_g(P) < \varepsilon/2$ şi $y_1 - y_0 + y_n - y_{n-1} < \varepsilon/[2(M^f - m^f + M^g - m^g)]$ rezultă că $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$. Numărul ε putând fi oricât de mic, rezultă că f este integrabilă pe $[\alpha, \beta]$.
Pentru a demonstra egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} g(y)\,dy$$

remarcăm următoarele:

$$f(\alpha) \leq g(\alpha) \text{ implică } m_1^f \leq m_1^g \text{ şi } f(\alpha) > g(\alpha) \text{ implică } m_1^f = m_1^g$$

de unde rezultă inegalitatea $m_1^f - m_1^g \leq 0$.

$$f(\beta) \leq g(\beta) \text{ implică } m_n^f \leq m_n^g \text{ şi } f(\beta) > g(\beta) \text{ implică } m_n^f = m_n^g$$

de unde rezultă inegalitatea $m_n^f - m_n^g \leq 0$.
Inegalităţile $m_1^f - m_1^g \leq 0$ şi $m_n^f - m_n^g \leq 0$ implică inegalitatea $L_f(P) \leq L_g(P)$.

$$f(\alpha) \leq g(\alpha) \text{ implică } M_1^f = M_1^g \text{ şi } f(\alpha) > g(\alpha) \text{ implică } M_1^f \geq M_1^g$$

de unde rezultă inegalitatea $M_1^f - M_1^g \geq 0$.

$$f(\beta) \leq g(\beta) \text{ implică } M_n^f = M_n^g \text{ şi } f(\beta) > g(\beta) \text{ implică } M_n^f \geq M_n^g$$

de unde rezultă inegalitatea $M_n^f - M_n^g \geq 0$.
Inegalităţile $M_1^f - M_1^g \geq 0$ şi $M_n^f - M_n^g \geq 0$ implică inegalitatea $U_f(P) \geq U_g(P)$.
Prin urmare avem:

$$L_f(P) \leq L_g(P) \leq U_g(P) \leq U_f(P)$$

Deoarece $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \int\limits_\alpha^\beta f(y)\,dy$ (am arătat că f este integrabilă), din aceste inegalităţi obţinem egalităţile:

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \int\limits_\alpha^\beta f(y)\,dy = \mathcal{L}_g = \mathcal{U}_g = \int\limits_\alpha^\beta g(y)\,dy$$

□

Comentariu: Există diferite caracterizări ale integrabilităţii Riemann-Darboux. Una dintre aceste caracterizări, care se leagă de rezultatele stabilite în teoremele precedente este următoarea:
O funcţie mărginită $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux dacă şi numai dacă f este continuă aproape peste tot.
Menţionăm că funcţia f este continuă aproape peste tot dacă mulţimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.
O mulţime $A \subset [a, b]$ se zice neglijabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie cel mult numărabilă de intervale deschise (a_n, b_n) astfel încât să avem:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$$

O funcţie continuă pe porţiuni este continuă aproape peste tot.

43 Teoreme de medie.

Teorema 43.1. *Dacă funcţiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt continue şi $g(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât să avem:*

$$\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(c) \cdot \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Demonstraţie. Dacă funcţia g este identic nulă, egalitatea de mai sus este verificată, pentru orice $c \in [a, b]$. Presupunem în cele ce urmează că g nu este identic nulă, de unde $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$. Considerăm $m = \inf\{f(x)|x \in [a, b]\}$ şi $M = \sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$.
Întrucât $g(x) \geq 0$ avem:

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x), \forall x \in [a, b]$$

De aici rezultă:

$$m \cdot \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

şi

$$K = \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \in [m, M]$$

Funcţia f fiind continuă există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = K$. De aici rezultă:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

□

Consecinţa 43.1. *Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a).$$

44 Teorema fundamentală de calcul integral.

Teorema 44.1. *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi integrabilă Riemann-Darboux pe segmentul $[a, b]$ şi $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcţia definită prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

atunci funcţia F este continuă pe $[a, b]$. Mai mult, dacă funcţia f este continuă pe $[a, b]$, atunci F este derivabilă pe $[a, b]$ şi $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Demonstraţie. Deoarece f este mărginită, există $M > 0$ astfel încât $|f(t)| \leq M$, $\forall t \in [a, b]$. Pentru $c \in [a, b]$ fixat, avem:

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \right| = \left| \int_c^x f(t)\,dt \right|$$

Pentru $x > c$ rezultă inegalitatea:

$$|F(x) - F(c)| \leq \int_c^x |f(t)|\,dt \leq M \cdot (x - c)$$

Pentru $x < c$ rezultă inegalitatea:

$$|F(x) - F(c)| \leq \int_x^c |f(t)|\, dt \leq M \cdot (c - x)$$

Rezultă în final inegalitatea:

$$|F(x) - F(c)| \leq M \cdot |x - c|, \forall x \in [a, b]$$

Această inegalitate demonstrează continuitatea funcţiei F în punctul c.
Să presupunem acum că funcţia f este continuă pe $[a, b]$ şi să considerăm $c \in [a, b]$ fixat.
Pentru $c < x < b$ avem:

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| = \left| \frac{\int_a^x f(t)\, dt - \int_a^c f(t)\, dt}{x - c} - f(c) \right| \leq \left| \frac{\int_c^x f(t)\, dt}{x - c} - f(c) \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_c^x (f(t) - f(c))\, dt}{x - c} \right| \leq \frac{\int_c^x |f(t) - f(c)|\, dt}{x - c}$$

Cum f este continuă, pentru $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$ pentru orice $|t - c| < \delta$. De aici, pentru $x \in (c, c + \delta)$, rezultă:

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| < \frac{\int_c^x \varepsilon\, dt}{x - c} = \varepsilon$$

Cu alte cuvinte, derivata la dreapta ${F_+}'(c)$ există şi ${F_+}'(c) = f(c)$.
În mod analog rezultă că derivata la stânga există şi ${F_-}'(c) = f(c)$. □

Remarca 44.1. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$, atunci:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt = F(x_2) - F(x_1)$$

unde $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

Remarca 44.2. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă cu $\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$, atunci există o constantă reală C astfel încât:

$$\Phi(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in [a, b]$$

unde $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

Remarca 44.3. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă cu $\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$, atunci oricare ar fi $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$ avem:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Comentariu: Evaluarea integralei $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt$ pe baza formulei:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

depinde de găsirea unei funcţii Φ care are proprietatea $\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Exemplu 44.1.

a) $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + 2)\, dx = (\frac{1}{4}x^4 + 2x)/_0^1 = \frac{9}{4}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^2 - x)\, dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})/_{-1}^0 = \frac{5}{6}$

Definiţia 44.1. *Orice funcţie $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ care are proprietatea $\Phi'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ se numeşte o primitivă a funcţiei f .*

Remarca 44.4. Din păcate există multe funcţii a căror primitivă nu poate fi scrisă în termeni de funcţii elementare. În asemenea situaţii calculul integralei $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt$ se face numeric.

45 Tehnici de determinare a primitivelor.

În secţiunea precedentă am văzut că integrala Riemann-Darboux

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

poate fi calculată găsind o primitivă a funcţiei f, dacă aşa ceva există şi este exprimabilă în termeni de funcţii simple.
Există numeroase tehnici de determinare a primitivelor şi în această secţiune prezentăm două din cele mai importante tehnici: *integrarea prin părţi* şi *schimbarea de variabilă.*

45.1 Integrarea prin părţi

Teorema 45.1. *Dacă funcţiile* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sunt derivabile şi au derivate continue pe* $[a, b]$ *atunci are loc egalitatea:*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

unde simbolul $\int f(x)g'(x)\,dx$ *reprezintă mulţimea primitivelor funcţiei* fg'*, iar* $\int f'(x)g(x)\,dx$ *reprezintă mulţimea primitivelor funcţiei* $f'g$*.*

Demonstraţie. Funcţia $h = fg$ are derivată continuă pe $[a, b]$ şi

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Fie acum $\varphi \in \int f(x)g'(x)\,dx$ şi diferenţa $\psi = \varphi - fg$. Prin derivare se obţine egalitatea:

$$\psi' = \varphi' - f'g - fg' = -f'g$$

care arată că $\psi \in -\int f'g$.

Astfel am obţinut că funcţia $\varphi = fg + \psi$ şi $\psi \in -\int f'g$. Altfel spus, $\varphi \in fg - \int f'g$.

Analog se arată că oricare ar fi $\psi \in -\int f'(x)g(x)\,dx$, funcţia $\varphi = fg + \psi \in \int f(x)g'(x)\,dx$. □

Consecinţa 45.1. *Dacă funcţiile* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *au derivate continue pe* $[a, b]$*, atunci are loc egalitatea:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Exemplu 45.1. *Multe formule de recurenţă se stabilesc prin integrare prin părţi repetată. De exemplu, fie:*

$$I_n = \int \cos^n x\,dx$$

Integrând prin părţi rezultă:

$$I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

De aici avem:

$$nI_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

Această formulă împreună cu egalităţile $I_0 = x$ *şi* $I_1 = \sin x$ *conduc la evaluarea primitivei* I_n*, pentru* $n \in \mathbb{N}$*.*

45.2 Schimbarea de variabilă

Propoziţia 45.1. *Dacă funcţia $g : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ este surjectivă, este derivabilă cu derivata g' continuă pe I şi diferită de zero, şi dacă funcţia $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe J atunci are loc egalitatea:*

$$(\int f(x)\,dx) \circ g = \int (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$$

unde simbolul $(\int f(x)\,dx) \circ g$ reprezintă mulţimea de funcţii ce se obţine compunând primitivele funcţiei f cu funcţia g, iar simbolul $\int (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$ reprezintă mulţimea primitivelor funcţiei $(f \circ g) \cdot g'$.

Demonstraţie. Fie $G \in (\int f(x)\,dx) \circ g$. Există $F \in \int f(x)\,dx$ astfel încât $G = F \circ g$. Funcţia $G : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi :

$$G'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) = (f \circ g)(t) \cdot g'(t)$$

Această egalitate demonstrează apartenenţa $G \in \int (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$.

Fie acum $G \in \int (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$. Funcţia $g : I \to J$ este bijectivă şi inversa $g^{-1} : J \to I$ este derivabilă , funcţia derivată $(g^{-1})'$ este continuă şi verifică:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(t)} \quad \text{unde} \quad x = g(t)$$

Se consideră funcţia $F = G \circ g^{-1} : J \to \mathbb{R}$. Funcţia F este derivabilă şi verifică:

$$F'(x) = G'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = (f \circ g)(g^{-1}(x))[(g^{-1})'(x)]^{-1} \cdot (g^{-1})'(x) = f(x)$$

Prin urmare, $F \in \int f(x)\,dx$. Din definiţia lui F avem $G = F \circ g$ şi se obţine astfel apartenenţa $G \in (\int f(x)\,dx) \circ g$. □

Consecinţa 45.2. *Dacă f şi g satisfac condiţiile din Propoziţia 45.1 şi dacă $[a, b] \subset I$ şi $[\alpha, \beta] \subset J$ verifică $g([a, b]) = [\alpha, \beta]$ atunci are loc egalitatea:*

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Exemplu 45.2. *Pentru a găsi mulţimea de funcţii $\int \frac{dx}{x \cdot lnx}$ considerăm $f(x) = \frac{1}{x \cdot lnx}, x > 0$ şi $g(t) = e^t, t \in \mathbb{R}$. Suntem în condiţiile Propoziţiei 45.1 şi avem:*

$$(\int \frac{dx}{x \cdot lnx}) \circ g = \int \frac{e^t}{t \cdot e^t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = lnt + C \qquad \forall t > 0$$

Rezultă de aici egalitatea:

$$\int \frac{dx}{x \cdot lnx} = ln(lnx) + C$$

Remarca 45.1. Tehnica schimbării de variabilă se numeşte adesea *integrare prin substituţie*, unde $x = g(t)$ defineşte substituţia.

Remarca 45.2. Formula de schimbare a variabilei:

$$\int\limits_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

rămâne adevărată şi în ipoteza în care funcţia f este continuă pe porţiuni, iar g satisface condiţiile din Propoziţia 45.1 şi este strict crescătoare ($g(a) = \alpha$ şi $g(b) = \beta$).

Remarca 45.3. *Dacă* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *este continuă pe porţiuni şi este simetrică* $(f(-x) = f(x))$ *atunci:*

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int\limits_0^a f(x)\, dx$$

iar dacă f *este antisimetrică* $(f(-x) = -f(x))$ *atunci:*

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\, dx = 0$$

În ambele cazuri se prezintă integrala $\int\limits_{-a}^a f(x)\, dx$ sub forma:

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)\, dx + \int\limits_0^a f(x)\, dx$$

şi apoi se aplică primei integrale substituţia $x = -t$.

Remarca 45.4. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este periodică de perioadă* T *şi este continuă pe porţiuni atunci pe orice interval de lungime* T *integrala acestei funcţii are aceeaşi valoare:*

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\, dx = \int\limits_0^T f(x)\, dx \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Pentru demonstraţie se scrie:

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\, dx = \int\limits_a^0 f(x)\, dx + \int\limits_0^T f(x)\, dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\, dx$$

În integrala $\int\limits_T^{a+T} f(x)\, dx$ se aplică schimbarea de variabilă $x = t + T$ şi se obţine:

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)\, dx = -\int\limits_a^0 f(x)\, dx$$

46 Integrale improprii.

Integrala Riemann-Darboux a fost definită numai pentru funcţii mărginite definite pe un interval mărginit.
În această secţiune relaxăm aceste condiţii şi definim *integralele improprii.*

Definiţia 46.1. *Fie $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi integrabilă Riemann-Darboux pe intervalul $[a, b]$ pentru orice $b > a$. Dacă limita*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

există şi este finită atunci zicem că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge (f este integrabilă pe $[a, +\infty)$) şi prin definiţie:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Dacă limita $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ nu există sau nu este finită zicem că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este divergentă (f nu este integrabilă pe $[a, +\infty)$).

Remarca 46.1. Pentru $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ mărginită şi integrabilă Riemann-Darboux pe orice $[a, b]$, $a < b$, integrala $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ se defineşte în mod analog:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Remarca 46.2. Pentru a păstra aditivitatea în cazul integralelor improprii, integrala pe $\mathbb{R}$ se defineşte astfel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

cu condiţia ca ambele integrale din membrul drept al egalităţii să fie convergente.

În continuare vom defini integrala unei funcţii pe un interval mărginit atunci când funcţia nu este mărginită pe interval. Aceste integrale se numesc *integrale improprii de speţa a doua.*

Definiţia 46.2. *Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann-Darboux pe $[a+\varepsilon, b]$ pentru orice $\varepsilon \in (0, b-a)$. Dacă limita:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

există şi este finită atunci zicem că integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ converge (f este integrabilă pe $[a, b]$) şi prin definiţie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Remarca 46.3. Pentru $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b-\varepsilon]$ pentru orice $\varepsilon \in (0, b-a)$, integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se defineşte în mod analog:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Propoziţia 46.1 (Criteriu de comparaţie pentru integrale improprii)**.** *Fie $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funcţii mărginite şi integrabile Riemann-Darboux pe $[a, b]$ pentru orice $b > a$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

1) $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \ge a$

2) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge*

atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge de asemenea şi are loc inegalitatea:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Demonstraţie. Pentru orice $b > a$ avem:

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Funcţia $b \mapsto \int\limits_a^b g(x)\,dx$ este crescătoare şi mărginită:

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Prin urmare funcţia crescătoare $b \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,dx$ este mărginită şi deci integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă. □

Un criteriu de comparaţie pentru integrale improprii de speţa a doua se formulează şi se demonstrează prin analogie.

Propoziţia 46.2. *Fie $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann-Darboux pe $[a + \varepsilon, b]$ pentru orice $\varepsilon \in (0, b - a)$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

1) $0 \leq f(x) \leq g(x),\ \forall x \in (a, b]$

2) $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *este convergentă*

atunci integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *converge de asemenea şi are loc inegalitatea:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

47 Serii Fourier.

Pentru ca o funcţie f să fie dezvoltabilă în serie Taylor este necesar ca f să fie indefinit derivabilă. Această restricţie este severă. Chiar dacă se foloseşte *formula lui Taylor cu rest* pentru reprezentarea funcţiei, funcţia trebuie să fie derivabilă de un număr finit de ori. Această din urmă condiţie implică continuitatea funcţiei. Multe funcţii însă, care descriu fenomene fizice importante, nu sunt continue şi nu pot fi reprezentate nici cu formula lui Taylor. De exemplu, funcţia care descrie evoluţia în timp a tensiunii într-un circuit electric în care apar comutări de contacte, nu este continuă.
Seriile Fourier oferă posibilitatea de reprezentare a funcţiilor continue şi continue pe porţiuni. Aceasta întrucât pentru a construi seria Fourier, funcţia trebuie să fie doar integrabilă Riemann-Darboux.

Definiţia 47.1. *Fie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe porţiuni. Seria Fourier a lui f este, prin definiţie, seria de funcţii:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

în care coeficienţii Fourier a_n, b_n sunt calculaţi cu formulele:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx\, dx \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\, dx \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Remarca 47.1. În mod tradiţional, până când problema convergenţei seriei Fourier nu este tranşată, relaţia dintre funcţia f şi seria Fourier a lui f se notează cu semnul $\sim$ în loc de egalitate.

Rezultatul fundamental care va fi stabilit în această secţiune se referă la convergenţa seriei Fourier a unei funcţii continue pe porţiuni şi la suma seriei. Acest rezultat se bazează pe alte două rezultate care au importanţa lor în sine şi le vom prezenta sub forma a două leme.

Lema 47.1. [de reprezentare integrală a sumei parţiale $S_n(x)$] *Suma parţială de ordinul n, $S_n(x)$, a seriei Fourier a unei funcţii $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^1$ continue pe porţiuni şi prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}^1$ poate fi reprezentată sub forma:*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\, du \qquad x \in \mathbb{R}$$

Demonstraţie. Considerăm suma parţială $S_n(x)$ a seriei Fourier a funcţiei f:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cdot \cos kx + b_k\cdot \sin kx)$$

În virtutea definiţiei coeficienţilor Fourier a_k, b_k putem scrie:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[coskx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt + sinkx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt]$$

Introducând $\cos kx$ şi $\sin kx$ sub semnul de integrală şi folosind identitatea trigonometrică:

$$\cos k(x-t) = \cos kx\cdot \cos kt + \sin kx\cdot \sin kt$$

obţinem:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)]\, dt$$

Aplicând identitatea:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}$$

şi introducând $u = x - t$, $S_n(x)$ devine:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,du$$

Integrantul este o funcţie de u periodică de perioadă 2π şi prin urmare:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,du$$

□

Lema 47.2. *Dacă $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe porţiuni atunci sunt adevărate următoarele egalităţi:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx = 0$ *dacă* $-\pi \le a < b \le \pi$

unde a_n şi b_n sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei f.

Demonstraţie. Se consideră identitatea:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)]^2\,dx$$

Prin calcul se arată că avem:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)]^2\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(x)\,dx = \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)]$$

Ţinând seama de această egalitate din urmă, identitatea considerată devine:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx - \pi[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)]$$

De aici se deduce inegalitatea:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

valabilă pentru orice n şi cunoscută sub denumirea de *inegalitatea lui Bessel*.
Din inegalitatea lui Bessel rezultă că seria numerică:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

este convergentă şi , prin urmare, $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ şi $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
Remarcăm aici faptul că dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx = 0$$

atunci are loc egalitatea:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

numită *egalitatea lui Parseval.*
Convergenţa:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx = 0$$

se numeşte *convergenţa în medie a şirului de sume parţiale* $S_n(x)$ *la funcţia* $f(x)$.
Trecem acum să arătăm că pentru $a < b, a, b \in [-\pi, \pi]$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx = 0$$

Remarcăm la început că pentru $\alpha < \beta$ avem:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx \right| = \left| \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\alpha - \cos(n + \frac{1}{2})\beta}{n + \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{2}{n + \frac{1}{2}}$$

Fie $a = x_0 < x_1 < ... < x_p = b$ o partiţie a segmentului $[a, b]$ şi descompunerea corespunzătoare a integralei:

$$\int_{a}^{b} f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx$$

Notăm:

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

şi reprezentăm integrala $\int_{a}^{b} f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx$ în forma următoare:

$$\int_{a}^{b} f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - m_i] \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx + \sum_{i=0}^{p-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(n + \frac{1}{2})x \, dx$$

Pentru $\omega_i = M_i - m_i$, unde $M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, avem:

$$f(x) - m_i \leq M_i - m_i = \omega_i \qquad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ şi } i = 0, ..., p - 1$$

De aici rezultă:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx\right| \leq \sum_{i=0}^{p-1}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{p-1}|m_i|$$

Pentru $\varepsilon > 0$ alegem partiţia astfel încât să avem:

$$\sum_{i=0}^{p-1}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

Acest lucru este posibil pentru că funcţia f este continuă pe porţiuni şi este integrabilă. Acum putem lua $n > \frac{4}{\varepsilon}M(b-a)$, unde $M = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$ şi pentru asemenea valori ale lui n obţinem inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx\right| \leq \varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0$$

□

Teorema 47.1. [Fourier] *Fie $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe porţiuni care se prelungeşte prin periodicitate la toată axa reală. Dacă f are derivate laterale finite în punctele ei de discontinuitate atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a) dacă x_0 este un punct de continuitate a lui f atunci:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$$

b) dacă x_0 este punct de discontinuitate a lui f atunci:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

Demonstraţie. Facem demonstraţia în cazul în care f nu este continuă într-un punct x_0. Considerăm:

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ şi } f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Conform lemei 47.1 avem:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-u)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,du$$

Avem de asemenea:

$$\frac{1}{2}\cdot f(x_0^+) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0^+)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,du$$

$$\frac{1}{2}\cdot f(x_0^-) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0^-)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,du$$

şi, prin urmare:

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0-u) - f(x_0^+)]\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,du + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0-u) - f(x_0^-)]\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,du \end{aligned}$$

Integranzii sunt bine definiţi peste tot, cu excepţia lui $u = 0$ unde trebuie făcută o analiză. Primul integrant poate fi scris sub forma:

$$F_1(u)\cdot\sin(n+\frac{1}{2})u$$

unde

$$F_1(u) = \frac{f(x_0-u) - f(x_0^+)}{u}\cdot\frac{\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}$$

Pentru $u \to 0^-$, cel de-al doilea factor tinde la 1 şi produsul tinde la $-f'(x_0^+)$. Astfel dacă punem $F_1(0) = -f'(x_0^+)$ integrantul este bine definit în $u = 0$.
În mod similar, avem:

$$F_2(u) = \frac{f(x_0-u) - f(x_0^-)}{-u}\cdot\frac{-\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}$$

are limita $+f'(x_0^-)$ şi dacă punem $F_2(0) = +f'(x_0^-)$ cel de-al doilea integrant este bine definit.
Prin urmare avem:

$$S_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} F_1(u)\cdot\sin(n+\frac{1}{2})u\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F_2(u)\cdot\sin(n+\frac{1}{2})u\,du$$

şi aplicând lema 47.2 concluzionăm că:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

Pe firul acestei demonstraţii se arată uşor că dacă f este continuă în x_0 atunci:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$$

□

48 Diferite forme ale seriei Fourier.

Teorema 48.1. [schimbarea originii intervalului fundamental $[-\pi,\pi]$**]** *Dacă* $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe porţiuni şi este prelungită pe* $\mathbb{R}$ *prin periodicitate, atunci pentru orice* α, *coeficienţii Fourier* a_n, b_n *ai lui* f *verifică relaţiile:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

şi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

în orice punct de continuitate $x \in [\alpha - \pi, \alpha + \pi]$.

Demonstraţie. Funcţiile $f(x) \cdot \cos nx, f(x) \cdot \sin nx$ sunt periodice de perioadă 2π. Rezultă că integralele lor sunt aceleaşi pe orice interval de lungime 2π. Se obţin în acest fel egalităţile:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = a_n$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = b_n$$

Pentru egalitatea:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

considerăm şirul $y_k = x - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Există $k_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $y_{k_0} \in [-\pi, \pi]$ şi pentru k_0 avem: $f(y_{k_0}) = f(x - 2k_0\pi) = f(x)$, precum şi:

$$f(y_{k_0}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos ny_{k_0} + b_n \cdot \sin ny_{k_0}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

$\square$

Remarca 48.1. În condiţiile Teoremei 48.1, dacă x este un punct de discontinuitate a prelungirii lui f prin periodicitate, atunci are loc:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

Această egalitate se demonstrează asemănător cu egalitatea din Teorema 48.1.

Teorema 48.2. [schimbarea lungimii intervalului] *Dacă* $f : [-L, L] \to \mathbb{R}^1$ *este o funcţie continuă pe porţiuni, atunci pentru orice* $x \in [-L, L]$ *are loc:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}) \quad \text{dacă } f \text{ este continuă în } x$$

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}) \quad \text{dacă } f \text{ nu este continuă în } x$$

în care:

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1,2,3,...$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $\varphi : [-\pi,\pi] \to [-L,L]$ definită prin $\varphi(y) = \frac{L}{\pi}\cdot y$ şi funcţia $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definită prin $g = f\circ\varphi, g(y) = f(\varphi(y)) = f(\frac{Ly}{\pi})$.
Remarcăm că funcţia g este continuă pe porţiuni şi punctele de discontinuitate y_d ale lui g se obţin din punctele de discontinuitate x_d ale lui f cu formula $y_d = \frac{\pi x_d}{L}$.
Dacă într-un punct y funcţia g este continuă atunci:

$$g(y) = \frac{a_0^{(g)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(g)}\cdot\cos ny + b_n^{(g)}\cdot\sin ny)$$

iar dacă g este discontinuă în y, atunci:

$$\frac{1}{2}[g(y^+) + g(y^-)] = \frac{a_0^{(g)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(g)}\cdot\cos ny + b_n^{(g)}\cdot\sin ny)$$

unde:

$$a_n^{(g)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\cdot\cos ny\,dy \qquad n = 0,1,2,...$$

$$b_n^{(g)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\cdot\sin ny\,dy \qquad n = 1,2,3,...$$

Prin schimbarea de variabilă $y = \dfrac{\pi x}{L}$ pentru $a_n^{(g)}$ şi $b_n^{(g)}$ obţinem:

$$a_n^{(g)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\cdot\cos ny\,dy = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{L}\int\limits_{-L}^{L} g(\frac{\pi x}{L})\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n^{(g)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y)\cdot\sin ny\,dy = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{L}\int\limits_{-L}^{L} g(\frac{\pi x}{L})\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

şi astfel avem:

$$\frac{a_0^{(g)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(g)}\cdot\cos ny + b_n^{(g)}\cdot\sin ny) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{L})$$

Dacă x este punct de continuitate pentru f atunci $f(x) = g(\dfrac{\pi x}{L}) = g(y)$ şi dacă x este punct de discontinuitate pentru f atunci:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2}[g(y^+) + g(y^-)]$$

cu $y^+ = \dfrac{\pi x^+}{L}, y^- = \dfrac{\pi x^-}{L}$.
Rezultă în acest fel egalităţile din enunţ. $\square$

Remarca 48.2. Dacă $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^1$ este o funcţie pară ($f(-x) = f(x)$) atunci funcţia $f(x) \cdot \cos nx$ este funcţie pară şi funcţia $f(x) \cdot \sin nx$ este funcţie impară. Coeficienţii Fourier a_n, b_n în acest caz sunt:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Prin urmare, *dacă funcţia f este pară atunci dezvoltarea ei în serie Fourier conţine doar funcţia cosinus:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

Această dezvoltare se numeşte *dezvoltare Fourier în serie de cosinusuri* a funcţiei pare $f(x)$.

Remarca 48.3. Dacă $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^1$ este o funcţie impară ($f(-x) = -f(x)$) atunci funcţia $f(x) \cdot \cos nx$ este funcţie impară şi funcţia $f(x) \cdot \sin nx$ este funcţie pară. Coeficienţii Fourier a_n, b_n în acest caz sunt:

$$a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Prin urmare, *dacă funcţia f este impară atunci dezvoltarea ei în serie Fourier conţine doar funcţia sinus:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

Această dezvoltare se numeşte *dezvoltare Fourier în serie de sinusuri* a funcţiei impare $f(x)$.

Remarca 48.4. Aceste rezultate pot fi folosite pentru o funcţie oarecare $f(x)$ care trebuie dezvoltată în serie Fourier pe intervalul $[0, \pi]$. Definind o funcţie nouă $g(x)$ cu regula:

$$g(x) = \begin{cases} f(-x), & \text{pentru} \quad -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & \text{pentru} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

obţinem o funcţie pară care coincide cu funcţia iniţială f pe intervalul $[0, \pi]$.
Funcţia g se dezvoltă în serie Fourier de cosinusuri:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$

şi coeficienţii a_n se obţin cu formula:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cdot \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, ..$$

Astfel se obţine *o dezvoltare în serie de cosinusuri a funcţiei f pe* $[0, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$

cu:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cdot \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, ..$$

Remarca 48.5. Aceeaşi funcţie $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^1$ care trebuie dezvoltată poate fi extinsă pe $[-\pi, \pi]$ prin imparitate:

$$h(x) = \begin{cases} -f(-x), & \text{pentru} \quad -\pi \le x < 0 \\ f(x), & \text{pentru} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Funcţia h fiind impară se dezvoltă în serie de sinusuri pe $[-\pi, \pi]$:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

cu

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cdot \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

De aici rezultă *dezvoltarea lui f în serie de sinusuri pe intervalul* $[0, \pi]$*:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

cu

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cdot \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Am obţinut astfel următorul rezultat:

Teorema 48.3. *Dacă $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^1$ este continuă pe porţiuni, atunci funcţia f poate fi dezvoltată pe $[0, \pi]$ în serie de cosinusuri sau în serie de sinusuri:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \qquad \textit{sau} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

unde:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cdot \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cdot \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Partea III

Calcul diferenţial şi integral pentru funcţii de n variabile reale

49 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 49.1. *Mulţimea $\mathbb{R}^n$ este prin definiţie mulţimea tuturor sistemelor ordonate $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n numere reale.*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}^1\}$$

Definiţia 49.2. *O funcţie reală de n variabile reale este o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$.*

Exemplu 49.1. Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ definită prin $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ este o funcţie reală de două variabile.

Definiţia 49.3. *O funcţie vectorială de n variabile reale este o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Exemplu 49.2. Funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

este o funcţie vectorială de trei variabile.

O funcţie vectorială de n variabile $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ poate fi scrisă sub forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Funcţiile reale de n variabile $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ care apar în această reprezentare a lui f se numesc componentele scalare ale funcţiei f.

La investigarea funcţiilor reale de o singură variabilă reală s-au considerat numere x care sunt aproape de numărul a. Aceasta a condus la considerarea modulului $|x - a|$, care reprezintă distanţa dintre x şi a.

O distanţă analoagă poate fi introdusă în $\mathbb{R}^n$ în felul următor:

Cu operaţiile:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + {} & y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ şi } (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \\ k \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), \quad & k \in \mathbb{R}^1, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mulţimea $\mathbb{R}^n$ se structurează ca spaţiu vectorial real n-dimensional.

Pentru vectorul $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se defineşte **norma** (sau lungimea) lui x prin

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Pentru doi vectori $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se defineşte distanţa cu formula:

$$\|x - a\| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2\right]^{1/2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}.$$

Definiţia 49.4. *O vecinătate a vectorului $a \in \mathbb{R}^n$ este o mulţime $V \subset \mathbb{R}^n$ cu următoarea proprietate:*

$\exists\, r > 0$ *a.î. mulţimea* $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ *este inclusă în* V*:* $S_r(a) \subset V$.

Definiţia 49.5. *Mulţimea $S_r(a)$ definită prin*

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

se numeşte sferă deschisă centrată în punctul a.

Definiţia 49.6. *O funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ se numeşte şir de puncte din $\mathbb{R}^n$.*

Ca şi în cazul şirurilor de numere reale $f(k) = a_k$ se numeşte termenul de rang k al şirului de vectori din $\mathbb{R}^n$ şi tot şirul se notează cu (a_k).

Definiţia 49.7. *Şirul de puncte (a_k), $a_k \in \mathbb{R}^n$ converge la punctul $a \in \mathbb{R}^n$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = N(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall\, k > N \Rightarrow \|a_k - a\| < \varepsilon$.*

Faptul că şirul de puncte (a_k), $a_k \in \mathbb{R}^n$ converge la punctul $a \in \mathbb{R}^n$ se notează cu:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \text{sau} \quad a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$$

iar numărul a este limita şirului.

Propoziţia 49.1. *Dacă un şir de puncte (a_k) din $\mathbb{R}^n$ este convergent atunci limita este unică.*

Demonstraţie. Ca şi pentru şiruri de numere reale. □

Propoziţia 49.2. *Dacă un şir de puncte (a_k) din $\mathbb{R}^n$ este convergent atunci şirul (a_k) este mărginit. Adică: $\exists\, M > 0$ a.î. $\|a_k\| < M\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.*

Demonstraţie. Ca şi pentru şiruri de numere reale. □

Propoziţia 49.3. *Dacă şirul (a_k), $a_k \in \mathbb{R}^n$ converge la $a \in \mathbb{R}^n$ atunci orice subşir al şirului (a_k) converge la a.*

Demonstraţie. Ca şi pentru şiruri de numere reale. □

Propoziţia 49.4. *Şirul de puncte (a_k), $a_k \in \mathbb{R}^n$ converge la $a \in \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $(a_{i,k})$ converg la numerele a_i, $i = \overline{1, n}$. Unde $a_k = (a_{1k}, \ldots, a_{nk})$.*

Demonstraţie. Dacă $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ atunci $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N = N(\varepsilon) > 0$ a.î. $\|a_k - a\| < \varepsilon\ \forall\ k > N(\varepsilon)$. Rezultă de aici că $|a_{ik} - a_i| < \varepsilon\ \forall\ k > N(\varepsilon), i = \overline{1,n}$. Prin urmare $a_{ik} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_i,\ i = \overline{1,n}$.

Dacă $a_{ik} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_i,\ i = \overline{1,n}$ atunci $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_i = N_i(\varepsilon)$ a.î. $|a_{ik} - a_i| < \frac{\varepsilon}{n},\ \forall\ k > N_i$. Rezultă de aici că pentru orice $k > \max\{N_1, \dots, N_n\}$ avem $\|a_k - a\| < \varepsilon$. Adică $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. □

Propoziţia 49.5. *(Weierstrass-Bolzano) Dacă şirul de puncte (a_k) din $\mathbb{R}^n$; $(a_k) \in \mathbb{R}^n$; este mărginit atunci conţine un subşir convergent.*

Demonstraţie. Dacă şirul (a_k) este mărginit atunci şirurile de coordonate (a_{ik}) sunt mărginite şi se aplică Weierstrass-Bolzano pentru şiruri de numere reale. □

Criteriul de convergenţă Cauchy. *Şirul de puncte (a_k) din $\mathbb{R}^n$ este convergent dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N = N(\varepsilon)$ a.î. $\forall\ p, q > N \Rightarrow \|a_p - a_q\| < \varepsilon$.*

Demonstraţie. Se aplică criteriul lui Cauchy pentru şirurile de coordonate (a_{ik}). □

Definiţia 49.8. *Un punct $x \in \mathbb{R}^n$ este punct interior al mulţimii A dacă există o sferă deschisă $S_r(x)$ cu proprietatea $S_r(x) \subset A$.*
Un punct y din sfera deschisă $S_r(x)$ este punct interior al mulţimii $S_r(x)$.

Definiţia 49.9. *Interiorul unei mulţimi $A \subset \mathbb{R}^n$ este mulţimea formată cu toate punctele interioare ale lui A. Tradiţional interiorul mulţimii A se notează cu $\mathring{A}$ sau cu $Int(A)$.*

Dacă mulţimea A este o sferă deschisă $S_r(a)$, atunci $\mathring{A} = A$.

Definiţia 49.10. *O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă dacă $\mathring{A} = A$.*

O sferă deschisă $S_r(x)$ este o mulţime deschisă.

O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă dacă şi numai dacă orice element al mulţimii A îi aparţine cu o întreagă vecinătate.

Reuniunea unei familii de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Mulţimile $\mathbb{R}^n$ şi $\emptyset$ sunt deschise.

Definiţia 49.11. *O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ este închisă dacă mulţimea $C_{\mathbb{R}^n}A$ este deschisă.*

Intersecţia unei familii oarecare de mulţimi închise este o mulţime închisă.

Reuniunea unui număr finit de mulţimi închise este mulţime închisă.

Mulţimile $\mathbb{R}^n$ şi $\emptyset$ sunt închise.

Sfera închisă de rază r, $\overline{S}_r(a)$, centrată în $a \in \mathbb{R}^n$ este definită prin:

$$\overline{S}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \le r\}$$

Definiţia 49.12. *Un punct $a \in \mathbb{R}^n$ este punct limită (sau punct de acumulare) al mulţimii $A \subset \mathbb{R}^n$ dacă orice vecinătate redusă $V^0 = V - \{a\}$ a lui a intersectează mulţimea A.*

Definiţia 49.13. *Închiderea $\overline{A}$ a mulţimii $A \subset \mathbb{R}^n$ este intersecţia tuturor mulţimilor închise care conţin mulţimea A.*

Mulţimea punctelor din $\overline{A}$ care nu sunt în interiorul mulţimii A este frontiera mulţimii A şi se notează tradiţional cu ∂A sau Front (A); $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$

Operaţia de închidere a mulţimilor are următoarele proprietăţi::

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $\overline{A} \supset A$;
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
- $\overline{A} = A \quad \Leftrightarrow A$ este închisă;
- $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V_x,\ V_x \cap A \neq \phi$.

Definiţia 49.14. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este mărginită dacă există $r > 0$ astfel încât $A \subset S_r(0)$.*

Altfel spus: $\|a\| < r, \forall\, a \in A$

Definiţia 49.15. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este compactă dacă este mărginită şi închisă.*

O sferă închisă $\overline{S}_a(r)$ este compactă.

Exemplu 49.3. Mulţimea D definită prin:

$$D = \{(x, y) \,|\, x + y \leq 1 \text{ şi } x \geq 0 \text{ şi } y \geq 0\}$$

este compactă.

Soluţie: În adevăr, mulţimea D este mărginită pentru că este inclusă în sfera $S_2(0) = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 4\}$.
Pe de altă parte, dacă $a \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2} D$, atunci a se află la o distanţă $r > 0$ de cel puţin una din dreptele $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Rezultă că sfera deschisă $S_r(a)$ este inclusă în una din regiunile $x + y > 1$, $x < 0$ sau $y < 0$. Deci $S_r(a) \subset C_{\mathbb{R}^2} D$, şi prin urmare mulţimea $C_{\mathbb{R}^2} D$ este deschisă. Rezultă astfel că mulţimea D este închisă.

Remarca 49.1. *Dacă mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este compactă, atunci orice şir (x_k) de elemente din A ($x_k \in A$) conţine un subşir (x_{k_l}) care converge la un punct $x_0 \in A$.*

Definiţia 49.16. *O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ este conexă dacă nu există două mulţimi deschise G_1, G_2 care să aibe următoarele proprietăţi:*

$$A \subset G_1 \cup G_2,\ A \cap G_1 \neq \emptyset,\ A \cap G_2 \neq \emptyset,\ \text{şi } (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \emptyset.$$

50 Limita într-un punct a unei funcţii de n variabile.

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ o funcţie reală de n variabile şi $a \in \mathbb{R}^n$ un punct de acumulare pentru mulţimea A (orice vecinătate V a punctului a conţine cel puţin punctul x' cu următoarele proprietăţi: $x' \neq a$ şi $x' \in V \cap A$).

Definiţia 50.1. *Funcţia f are limita $L \in \mathbb{R}^1$ în punctul a dacă $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < \|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Faptul că funcţia f are limita L în a se notează tradiţional în felul următor:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{sau} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$$

Ca şi în cazul funcţiilor reale de o singură variabilă verificarea faptului că funcţia f are limita L în a, pe baza definiţiei 50.1 este anevoioasă. De aceea se folosesc de obicei reguli referitoare la sumă, produs, cât etc care se obţin pe o cale asemănătoare cu cea de la funcţii de o singură variabilă. Utilizarea acestor reguli este ilustrată în exemplul următor:

Exemplu 50.1. Să se determine $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\ y \to 1}} f(x, y)$ unde $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; $(x, y) \neq (0, 0)$.

Soluţie: $x \to 2$ şi $y \to 1 \;\Rightarrow x^2 - y^2 \to 3$ şi $x^2 + y^2 \to 5 \;\Rightarrow \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \xrightarrow[(x,y) \to (2,1)]{} \dfrac{3}{5}$.

Definiţia 50.2. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ are limita $L \in \mathbb{R}^m$ în punctul de acumulare a al lui A dacă $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\|x - a\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - L\| < \varepsilon$. Faptul că funcţia f are limita L în a se notează tradiţional în felul următor:*

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \textit{sau} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$$

Dacă $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ şi $L = (L_1, \ldots, L_m)$ atunci are loc:

Propoziţia 50.1.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_i(x) = L_i \quad i = \overline{1, m}.$$

Demonstraţie. imediată □

Exemplu 50.2. Să se determine limita $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\ y \to 1}} f(x, y)$ unde $f(x, y) = \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}, x - y\right)$; $(x, y) \neq (0, 0)$.

Soluţie: $\dfrac{xy}{x^2 + y^2} \xrightarrow[\substack{x \to 2\\ y \to 1}]{} \dfrac{3}{5}$; $\quad x - y \xrightarrow[\substack{x \to 2\\ y \to 1}]{} 1 \;\Rightarrow f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \to (2,1)]{} \left(\frac{2}{5}, 1\right)$.

Criteriul lui Heine pentru limite:

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *are limită în punctul de acumulare* $x = a$ *dacă şi numai dacă pentru orice şir* (x_k) *având proprietăţile:* $x_k \in A$, $x_k \neq a$, *şi* $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ *şirul* $(f(x_k))$ *este convergent.*

Demonstraţie. Aceeaşi ca pentru funcţii de o singură variabilă. □

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *are limită în punctul de acumulare* $x = a$ *dacă şi numai dacă pentru orice şir* (x_k) *având proprietăţile:* $x_k \in A$, $x_k \neq a$, *şi* $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ *pentru* $k \to \infty$ *şirul* $(f(x_k))$ *este convergent.*

Demonstraţie. Se aplică acelaşi criteriu valabil pentru componentele $f_1, \ldots, f_m$ ale lui f. □

Criteriul Cauchy-Bolzano pentru limite:

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *are limită pentru* $x \to a$ *dacă şi numai dacă* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *a.î.* $0 < \|x' - a\| < \delta$ *şi* $0 < \|x'' - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Pentru $m = 1$ criteriul se demonstrează la fel ca pentru funcţii de o singură variabilă.
Pentru $m > 1$ criteriul se demonstrează aplicând acelaşi criteriu pentru componentele $f_1, \ldots, f_m$ ale lui f. □

51 Continuitatea funcţiilor de n variabile.

Definiţia 51.1. *Funcţia reală de n variabile reale* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *este continuă în* $a \in A$ *dacă* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

În această definiţie se cere ca: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ să existe; $f(a)$ să fie definită şi cele două valori să coincidă.

În termeni de ε, δ această definiţie este echivalentă cu următoarea:

Definiţia 51.2. *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *este continuă în* $a \in A$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *cu următoarea proprietate:*

$$\|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definiţia 51.3. *Funcţia vectorială de n variabile reale* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *este continuă în* $a \in A$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *cu următoarea proprietate:*

$$x \in A \text{ şi } \|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Teorema 51.1. *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ *este continuă în* $a \in A$ *dacă şi numai dacă funcţiile* $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *sunt continue în* a.

Exemplu 51.1. Folosind condiţia de continuitate formulată în termeni de ε, δ arătaţi că funcţiile următoare sunt continue în punctele menţionate:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ în $x = y = 0$;

b) $f(x, y) = (x^2 - y^2, x \cdot y)$ în $x = 1, y = 1$;

c) $f(x, y, z) = x + y + z$ în $x = y = z = 0$;

d) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$ în $x = y = z = 1$.

Regulile de continuitate formulate pentru funcţii reale de o singură variabilă pot fi transpuse cu uşurinţă la funcţii de n variabile. Aceste reguli sunt formulate în următoarele teoreme.

Teorema 51.2. *Dacă funcţiile* $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *sunt continue în* $a \in A$ *atunci:*

i) funcţia $f + g$ *este continuă în* a;

ii) funcţia $f \cdot g$ *este continuă în* a;

iii) dacă $f(x) \neq 0\ \forall x \in A$ *atunci funcţia* $\dfrac{1}{f} : A \to \mathbb{R}^1$ *este continuă în* a.

Teorema 51.3. *Dacă funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ *este continuă în* $a \in A$ *şi* $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *este continuă în* $b = f(a) \in \mathbb{R}^p$ *atunci funcţia compusă* $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ *este continuă în* $a \in A$.

Exemplu 51.2. Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ defiinită prin $f(x, y) = x^2 + y^2$ este continuă în orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplu 51.3. Examinaţi continuitatea în $(0, 0)$ a funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Soluţie: Deoarece

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{m}{1 + m^2}$$

funcţia f nu are limită în $(0, 0)$. Rezultă că funcţia f nu este continuă în $(0, 0)$.

Exemplu 51.4. Analizaţi continuitatea în $(0, 0)$ a funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Soluţie: Pentru orice $m \in \mathbb{R}^1$ avem

$$f(x, mx) = \frac{m^3x^2}{1 + m^6x^4} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Cu toate acestea funcţia f nu este continuă în $(0, 0)$ pentru că

$$f(x, \sqrt[3]{x}) = \frac{x^2}{2x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

De fapt, f nu are limită în $(0, 0)$.

Teorema 51.4. **[Criteriul de continuitate a lui Heine]** *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă în $a \in A$ dacă pentru orice şir de puncte (x_k) cu proprietăţile $x_k \in A$, $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} a$, şirul de puncte $(f(x_k))$ converge la $f(a)$.*

Teorema 51.5. **[Criteriul de continuitate Cauchy-Bolzano]** *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă în $a \in A$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu următoarea proprietate:*

$$x', x'' \in A, \quad \|x' - a\| < \delta \text{ şi } \|x'' - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

Observaţia 51.1. Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă în $a \in A$ atunci funcţia $\|f\| : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1_+$ definită prin $\|f\|(x) = \|f(x)\|$ este continuă în a.

Observaţia 51.2. Generalizarea teoremelor stabilite pentru funcţii continue de o singură variabilă apelează la consideraţii topologice n dimensionale.

52 Proprietăţi remarcabile ale funcţiilor continue de n variabile.

Teorema 52.1. **[mărginirea]** *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă pe mulţimea compactă A, atunci:*

a) mulţimea $f(A)$ este mărginită.

b) există $a \in A$ astfel încât $\|f(a)\| = \sup\limits_{x \in A} \|f(x)\|$.

Demonstraţie. a) Să presupunem prin absurd că mulţimea $f(A)$ este nemărginită. În această ipoteză pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $x_k \in A$ astfel încât $\|f(x_k)\| > k$. Şirul (x_k) este mărginit şi prin urmare există un subşir (x_{k_l}) al şirului (x_k) convergent la un punct $x_0 \in A$, $x_{k_l} \xrightarrow[k_l \to \infty]{} x_0$. Rezultă de aici că $f(x_{k_l}) \xrightarrow[k_l \to \infty]{} f(x_0)$.
Prin urmare există N astfel încât pentru $k_l > N$ avem: $\|f(x_{k_l})\| \leq \|f(x_0)\| + 1$. Absurd.

b) Considerăm $R = \sup \|f(A)\|$ şi observăm că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $x_k \in A$ astfel încât

$$R - \frac{1}{k} < \|f(x_k)\| \leq R.$$

Pentru şirul (x_k) există un subşir x_{k_l} convergent la $x_0 \in A$: $x_{k_l} \xrightarrow[k_l\to\infty]{} x_0$. Rezultă $f(x_{k_l}) \xrightarrow[k_l\to\infty]{} f(x_0)$ şi deci $\|f(x_{k_l})\| \xrightarrow[k_l\to\infty]{} \|f(x_0)\|$. Din inegalitatea

$$R - \frac{1}{k_l} < \|f(x_{k_l})\| \leq R.$$

rezultă că $\|f(x_0)\| = R$. $\square$

Consecinţa 52.1. *Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este funcţie continuă şi A este mulţime compactă, atunci:*

a) există m, $M \in \mathbb{R}^1$ astfel încât

$$m = \inf\{f(x) \,|\, x \in A\} \qquad M = \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}$$

b) există c şi d în A astfel încât $f(c) = m$ şi $f(d) = M$.

Definiţia 52.1. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este uniform continuă pe A dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru $x', x'' \in A$ avem:*

$$\|x' - x''\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

Teorema 52.2. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă componentele scalare $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ale lui f sunt uniform continue.*

Teorema 52.3. *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este uniform continuă pe A şi A este o mulţime compactă, atunci f este uniform continuă pe A.*

Teorema 52.4. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $A' \subset \mathbb{R}^m$ şi $f : A \to A'$ surjectivă. Funcţia f este continuă pe A dacă şi numai dacă pentru orice mulţime deschisă $G' \subset \mathbb{R}^m$ există o mulţime deschisă $G \subset \mathbb{R}^n$ cu proprietatea:*

$$G \cap A = f^{-1}(G' \cap A').$$

Consecinţa 52.2. *Funcţia f este continuă pe A dacă şi numai dacă pentru orice mulţime închisă $F' \subset \mathbb{R}^m$, există o mulţime închisă $F \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât:*

$$F \cap A = f^{-1}(F' \cap A').$$

Teorema 52.5. *Dacă mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este conexă şi funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă, atunci mulţimea $f(A)$ este conexă.*

Consecinţa 52.3. *Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime compactă şi conexă şi funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este continuă, atunci $f(A)$ este un interval închis.*

53 Diferenţiabilitatea funcţiilor de n variabile.

În această secţiune vom defini ce înţelegem prin aceea că o funcţie de n variabile este diferenţiabilă. Vom începe cu analiza conceptului de de derivabilitate (diferenţiabilitate) parţială.

Definiţia 53.1. *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *are derivata parţială în raport cu variabila* x_i *într-un punct* $a \in \mathring{A}$ *dacă există limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{h}$$

şi este finită.

Valoarea acestei limite se notează tradiţional cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ şi se numeşte derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i, în punctul a.

Definiţia 53.2. *Dacă funcţia* f *are derivată parţială în raport cu variabila* x_i *într-o vecinătate* V *a punctului* a *atunci funcţia* $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ *definită pentru* $x \in V$ *se numeşte derivata parţială a funcţiei* f *în raport cu* x_i.

Observaţia 53.1. Pentru a calcula derivata parţială în raport cu x_i se derivează în mod obişnuit în raport cu x_i considerând celelalte variabile constante. În acest scop se folosesc regulile obişnuite de derivare a sumei, produsului şi a câtului de la funcţii de o singură variabilă.

Exemplu 53.1. În cazul funcţiei $f(x, y, z) = x^2 y + x \cdot \sin y + \dfrac{y}{z}$; $z \neq 0$ derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \sin y\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x\,\cos y + \frac{1}{z}\,; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}$$

În cazul funcţiei $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} + a_{jk})x_j.$$

Definiţia 53.3. *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *are derivată parţială în raport cu variabila* x_i *într-un punct* $a \in \mathring{A}$ *dacă componentele scalare* $f_1, \ldots, f_m$ *ale funcţiei* f *au derivate parţiale în raport cu* x_i *în* a. *Vectorul* $\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right)$ *se numeşte derivata parţială a lui* f *în raport cu* x_i *în* a *şi se notează cu* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right).$$

Dacă funcţia $f = (f_1, ..., f_m)$ are derivată parţială în raport cu variabila x_i pe o vecinătate V a lui a atunci funcţia $V \ni x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ se numeşte derivata parţială a lui f în raport cu x_i:

$$V \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)\right).$$

Exemplu 53.2. În cazul funcţiei $f(x,y,z) = (x+y+z, xy+xz+yz, xyz)$, derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1, y+z, yz)\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (1, x+z, xz)\,; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = (1, x+y, xy).$$

Definiţia 53.4. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este derivabilă după direcţia $u \in \mathbb{R}^n$ ($\|u\| = 1$) într-un punct $a \in \mathring{A}$ dacă există limita:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

şi este finită.

Valoarea acestei limite se notează tradiţional cu $\nabla_u f(a)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$ şi se numeşte derivata după u a lui f în a.

Observaţia 53.2. Fie $e_i = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i}, 0, ..., 0)$, $i = \overline{1, n}$. Derivata funcţiei f după direcţia e_i în a este:

$$\nabla_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,, \quad i = \overline{1, n}.$$

Prin urmare derivatele parţiale sunt cazuri particulare de derivate după direcţie.

Exemplu 53.3. Dacă $u = (u_x, u_y)$ şi $f(x,y) = x \cdot y$ atunci

$$\nabla_u f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u_y = y \cdot u_x + x \cdot u_y.$$

Definiţia 53.5. *Funcţia $f = (f_1, \ldots, f_m)$ este derivabilă după direcţia $u \in \mathbb{R}^n$ ($\|u\| = 1$) într-un punct $a \in \mathring{A}$ dacă există limita:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

Această limită se numeşte derivata după u a lui f în a şi se notează cu $\nabla_u f(a)$ sau $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$.

Se vede uşor că are loc egalitatea:

$$\nabla_u f(a) = (\nabla_u f_1(a), \ldots, \nabla_u f_m(a)).$$

Observaţia 53.3. Derivata după direcţia u: $\nabla_u f(a)$ există dacă şi numai dacă derivatele componentelor scalare $f_1, \ldots, f_m$ ale lui f după direcţia u: $\nabla_u f_1(a), \ldots, \nabla_u f_m(a)$ există.

Exemplu 53.4. Derivata după direcţia $u = (u_x, u_y, u_z)$ a funcţiei $f(x,y,z) = (xy + xz + yz,\ xyz)$ în (x,y,z) este:

$$\nabla_u f(x,y,z) = ((y+z)u_x + (x+z)u_y + (x+y)u_z, yz \cdot u_x + xz \cdot u_y + xy \cdot u_z).$$

Teorema 53.1. *Dacă derivatele parţiale* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$ *ale funcţiei* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *există pe o vecinătate* V *a punctului* $a \in \mathring{A}$ *şi sunt funcţii continue în punctul* a $\left(V \ni x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i},\ i = \overline{1,n}\ \text{funcţii continue}\right)$ *atunci are loc următoarea egalitate:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left[f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i\right] = 0.$$

Demonstraţie. Se consideră punctele $v_j = (a_1, a_2, \dots, a_j + h_j, a_{j+1} + h_{j+1}, \dots, a_n + h_n)$ pentru $j = \overline{1,n}$ precum şi $v_{n+1} = a$ şi se reprezintă diferenţa $f(a+h) - f(a)$ sub forma:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{j=1}^{n} [f(v_j) - f(v_{j+1})] = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(v_{j+1} + \theta_j \cdot h_j \cdot e_j)\cdot h_j \end{aligned}$$

cu $\theta_j \in [0,1]$, $i = \overline{1,n}$ şi $e_j = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{j}, 0, ..., 0)$.

De aici rezultă:

$$\frac{1}{\|h\|}\left[f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i\right] = \frac{1}{\|h\|}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(v_{i+1} + \theta_i \cdot h_i \cdot e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]\cdot h_i.$$

Observăm acum că $\|v_{i+1} + \theta_i \cdot h_i \cdot e_i - a\| \le \|h\|, i = \overline{1,n}$ şi de aici rezultă că dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(v_{i+1} + \theta_i \cdot h_i \cdot e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \frac{\varepsilon}{n}\ , \quad i = \overline{1,n}$$

atunci

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \frac{1}{\|h\|}\left|f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i\right| < \varepsilon.$$

□

Comentariu: În condiţiile teoremei 53.1 funcţia f este derivabilă după orice direcţie $u = (u_1, \dots, u_n)$ în a şi are loc egalitatea $\nabla_u f(a) = \sum_{i=1}^{u} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot u_i$, iar pe o vecinătate a punctului a funcţia f se poate aproxima cu un polinom de n variabile de gradul întâi:

$$f(a+h) \approx f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i.$$

Definiţia 53.6. *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *este diferenţiabilă în* $a \in \mathring{A}$ *dacă are derivate parţiale în raport cu fiecare variabilă* x_i *în punctul* a *şi*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left[f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i\right] = 0.$$

Funcţia $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ definită prin

$$d_a f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

se numeşte diferenţiala Fréchet (derivata Fréchet) a lui f în a.

Observaţia 53.4. Diferenţiala Fréchet a lui f în a este un polinom omogen de gradul întâi în variabilele $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Pentru orice $h \in \mathbb{R}^n$ cu $\|h\| = 1$ are loc egalitatea $d_a(h) = \nabla_h f(a)$.

Exemplu 53.5. Următoarele funcţii sunt diferenţiabile Fréchet şi diferenţialele lor Fréchet sunt:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ \ d_{(x,y)} f(h_x, h_y) = 2x \cdot h_x + 2y \cdot h_y$

b) $f(x,y) = x \cdot y,\ \ d_{(x,y)} f(h_x, h_y) = y \cdot h_x + x \cdot h_y$

c) $f(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z,\ \ d_{(x,y,z)} f(h_x, h_y, h_z) = (y+z) \cdot h_x + (x+z) \cdot h_y + (x+y) \cdot h_z.$

Observaţia 53.5. Dacă funcţia $f : \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$ atunci f este continuă în a.

Definiţia 53.7. *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$ dacă fiecare componentă scalară $f_1, \ldots, f_m : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a lui f este diferenţiabilă în a.*

Funcţia $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definită cu egalitatea:

$$d_a f(h) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) \cdot e_j \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

este diferenţiala (derivata) Fréchet a lui f în a. Unde $e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$.

Diferenţiala Fréchet a lui f în a este un sistem ordonat de m polinoame omogene de gradul întâi în variabilele $h_1, h_2, \ldots, h_n$ care sunt diferenţialele Fréchet ale componenetelor scalare a lui f.

Exemplu 53.6. Funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită cu formula

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

este diferenţiabilă Fréchet în orice punct $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ şi are loc egalitatea

$$d_{x_1,x_2,x_3} f(h_1, h_2, h_3) = (x_2 x_3 h_1 + x_1 x_3 h_2 + x_1 x_2 h_3,\ 2x_1 h_1 + 2x_2 h_2 + 2x_3 h_3), \ \ \forall (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$$

Definiţia 53.8. *Matricea aplicaţiei liniare $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se numeşte matricea Jacobi a lui f în a. Aceasta este o matrice $m \times n$ şi elementele sale sunt date de:*

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{m \times n}$$

$$d_a f(h) = J_a(f) \cdot h.$$

Exemplu 53.7. Funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definită cu formula:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \cdot e_i$$

este diferenţiabilă Fréchet în orice $x \in \mathbb{R}^n$ şi au loc următoarele egalităţi:

$$d_x f(h) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j \right) \cdot e_i$$
$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Observaţia 53.6. Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în $a \in \mathring{A}$ atunci f este continuă în a.

Teorema 53.2. *Dacă* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ *este diferenţiabilă în* $a \in \mathring{A}$ *şi* $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *este diferenţiabilă în* $b = f(a) \in \overset{\circ}{B}$ *atunci* $h = g \circ f$ *este diferenţiabilă în* a *şi are loc egalitatea:*

$$d_a h = d_b g \circ d_a f.$$

Demonstraţie. f este diferenţiabilă în $a \in \mathring{A} \Rightarrow$

$$f(x) - f(a) = d_a f(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x - a\| \quad \text{cu} \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

g este diferenţiabilă în $b = f(a) \Rightarrow$

$$g(y) - g(b) = d_b g(y-b) + \varepsilon_2(y) \cdot \|y - b\| \quad \text{cu} \quad \varepsilon_2(y) \xrightarrow[y \to b]{} 0$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) =& g(f(x)) - g(f(a)) = d_b g(f(x) - f(a)) + \varepsilon_2(f(x)) \cdot \|f(x) - f(a)\| \\ =& d_b g(d_a f(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x-a\|) + \varepsilon_2(f(x)) \cdot \|d_a f(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x-a\|\| \\ =& d_b g \circ d_a f(x-a) + \|x-a\| d_b g(\varepsilon_1(x)) + \|d_a f(x-a) + \varepsilon_1(x)\|x-a\|\|) \cdot \varepsilon_2(f(x)). \end{aligned}$$

Prin urmare avem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x) =& \frac{h(x) - h(a) - d_b g \circ d_a f(x-a)}{\|x-a\|} \\ =& d_b g(\varepsilon_1(x)) + \frac{\|d_a f(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x-a\|\|}{\|x-a\|} \cdot \varepsilon_2(f(x)) \end{aligned}$$

şi astfel:

$$\|\varepsilon_3(x)\| \leq \|d_b g\| \cdot \|\varepsilon_1(x)\| + (\|d_a f\| + \|\varepsilon_1(x)\|) \cdot \|\varepsilon_2(f(x))\|$$

De aici rezultă egalitatea:

$$\lim_{x \to a} \varepsilon_3(x) = 0.$$

□

Observaţia 53.7. Matricea Jacobi a funcţiei h în a este produsul matricei Jacobi a lui g în b şi a lui f în a:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \quad i = \overline{1,p}\,,\ j = \overline{1,n}.$$

Exemplu 53.8. Se consideră $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită cu formula $f(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1 \cdot x_2)$ şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită cu formula $g(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Să se determine $h(\rho,\theta) = (f \circ g)(\rho,\theta)$ şi $\dfrac{\partial h}{\partial \rho}, \dfrac{\partial h}{\partial \theta}$.

Consecinţa 53.1. *Dacă bijecţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ de la mulţimea deschisă A la mulţimea deschisă B este diferenţiabilă în $a \in A$ şi $f^{-1} : B \to A$ este diferenţiabilă în $b = f(a)$ atunci $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este un izomorfism şi*

$$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)} f^{-1}.$$

Această afirmaţie rezultă din egalitatea $f^{-1} \circ f = I_A$ folosind regula de diferenţiere a funcţiilor compuse.

54 Proprietăţi fundamentale ale funcţiilor diferenţiabile.

Teorema de medie (Lagrange) (creşterilor finite) Fie $x, h \in \mathbb{R}^n$ şi mulţimea $[x, x+h]$ definită prin:

$$[x, x+h] = \{x + th \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le t \le 1\}$$

Această mulţime se numeşte segment închis care uneşte x cu $x+h$.

Considerăm o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $A = \mathring{A}$ şi $x, x+h \in A$.

Teorema 54.1. *Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

a) $[x, x+h] \subset A$

b) *f este diferenţiabilă în toate punctele segmentului $[x, x+h]$*

atunci există $t_0 \in (0,1)$ cu următoarea proprietate:

$$f(x+h) - f(x) = d_{x+t_0 h} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t_0 h) \cdot h_i$$

Demonstraţie. Se consideră funcţia $\varphi(t) = f(x+th)$ pentru $t \in [0,1]$. Funcţia φ este derivabilă în orice punct $t \in (0,1)$ şi $\varphi'(t) = d_{x+th} f(h)$. Deoarece $f(x+h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0)$ aplicăm teorema Lagrange (creşterilor finite) funcţiei φ pe segmentul $[0,1]$ şi obţinem că există $t_0 \in (0,1)$ cu proprietatea:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) = d_{x+t_0 h} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t_0 h) \cdot h_i$$

□

Observaţia 54.1. Dacă funcţia de n variabile este vectorială; $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$ atunci teorema precedentă nu mai este adevărată. Astfel de exemplu pentru funcţia $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $(n = 1, m = 2)$ teorema nu este adevărată pentru că $f(2\pi) - f(0) \neq f'(t_0) \cdot 2\pi$ pentru orice $t_0 \in [0, 2\pi]$.

În cazul funcţiilor vectoriale de n variabile, $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ teorema lui Lagrange (a creşterilor finite) este următoarea:

Teorema 54.2. *Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

a) $[x, x + h] \subset A$

b) f *este diferenţiabilă în toate punctele segmentului* $[x, x + h]$

c) $\|d_{x+th} f\| \leq M, \quad \forall\, t \in [0, 1]$

atunci $\|f(x + h) - f(x)\| \leq M \cdot \|h\|$.

Demonstraţie. Se consideră din nou funcţia $\varphi(t) = f(x + th)$, $t \in [0, 1]$ şi $\psi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi_i(1) - \varphi_i(0)) \cdot \varphi_i(t)$, $t \in [0, 1]$. Pentru funcţia ψ există $t_0 \in [0, 1]$ cu proprietatea: $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(t_0)$. De aici rezultă:

$$\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(1) - \varphi_i(0)]^2 = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(1) - \varphi_i(0)] \cdot \varphi_i'(t_0) \leq$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(1) - \varphi_i(0)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i'(t_0)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq M \cdot \|h\| \cdot \|\varphi(1) - \varphi(0)\|$$

Rezultă în acest fel inegalitatea:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq M \cdot \|h\|$$

□

Extreme locale (Teorema Fermat; punct staţionar)

Definiţia 54.1. *Funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *are un maxim local în* $a \in \mathring{A}$ *dacă există o vecinătate deschisă* $V_a \subset A$ *a punctului* a *cu proprietatea:* $f(x) \leq f(a)$, $\forall\, x \in V_a$. *Dacă* $f(x) \geq f(a)$, $\forall\, x \in V_a$, *atunci* f *are în* a *un minim local.*

Teorema 54.3. *Dacă funcţia* f *este diferenţiabilă într-un punct* $a \in \mathring{A}$ *şi punctul* a *este un extrem local pentru* f *atunci* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$ *pentru* $i = \overline{1, n}$.

Demonstraţie. Pentru $h \in \mathbb{R}^n$ şi $t \in \mathbb{R}^1$ suficient de aproape de 0 considerăm funcţia $\varphi(t) = f(a + th)$. Funcţia f are în $t = 0$ un maxim sau un minim local şi este funcţie derivabilă. Rezultă că $\varphi'(0) = 0$ adică

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i = 0 \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^n.$$

Rezultă de aici egalităţile:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\,, \quad i = \overline{1,n}.$$

$\square$

Condiţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $i = \overline{1,n}$ nu sunt suficiente pentru ca punctul a să fie punct de maxim sau minim local pentru f.

Exemplu 54.1. Dacă $f(x,y) = xy$ atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$. De aici rezultă că punctul $0 = (0,0)$ este singurul punct care ar putea fi punct de extrem local pentru f. Pe de altă parte pentru orice $\delta > 0$ avem $f(\delta,\delta) = \delta^2$ şi $f(-\delta,\delta) = -\delta^2 < 0$. Prin urmare în orice vecinătate a lui 0, f are valori pozitive şi negative. Rezultă de aici că $(0,0)$ nu este nici maxim nici minim local pentru f.

Definiţia 54.2. *Un punct c este staţionar pentru f dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$ pentru $i = \overline{1,n}$.*

Ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă punctele staţionare se clasifică cu ajutorul aproximării Taylor.

Definiţia 54.3. *Dacă derivatele parţiale $A \ni x \mapsto \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ ale funcţiei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sunt continue atunci funcţia f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe A.*

Teorema 54.4 (de inversare locală)**.** *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe mulţimea deschisă A şi matricea Jacobi $J_a(f) = \Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\Big)_{n\times n}$ este nesingulară (adică $det\Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\Big) \neq 0$), atunci există o vecinătate deschisă U_a a punctului a şi o vecinătate deschisă V_b a punctului $b = f(a)$ cu proprietatea: $f : U_a \to V_b$ este bijectivă. Mai mult, funcţia inversă $f^{-1} : V_b \to U_a$ este diferenţiabilă în $b = f(a)$ şi are loc egalitatea:*

$$d_b f^{-1} = (d_a f)^{-1}.$$

Demonstraţie. demonstraţia este tehnică şi va fi omisă. $\square$

Exemplu 54.2. Funcţia $f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ definită pentru $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $\rho \neq 0$ este local inversabilă.

Funcţia $f(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$ definită pentru $(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3$, $\rho \neq 0$ este local inversabilă.

Funcţii implicite: Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $B \subset \mathbb{R}^m$ două mulţimi deschise şi $f : A \times B \to \mathbb{R}^m$ o funcţie. Notăm cu f_1, f_2, ... , f_m componentele scalare ale funcţiei f : $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ şi considerăm sistemul de ecuaţii:

$$(*)\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0 \end{array}\right.$$

Definiţia 54.4. *O funcţie $\varphi : A' \subset A \to B$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ care verifică egalităţile:*

$$(**) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0 \end{cases}$$

pentru orice $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A'$ se numeşte funcţie definită implicit de sistemul de ecuaţii $(*)$.

Sistemul de ecuaţii $(*)$ poate fi scris sub forma

$$f(x, y) = 0$$

unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Teorema 54.5 (de existenţă şi unicitate a funcţiei implicite)**.** *Dacă funcţia f are următoarele proprietăţi:*

1) $\exists\, a \in A$ şi $b \in B$ a.î. $f(a, b) = 0$

2) f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $A \times B$

3) diferenţiala Fréchet $d_b f_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ este izomorfism (unde $f_a : B \to \mathbb{R}^m$ este definită prin $f_a(y) = f(a, y)$), atunci există o vecinătate deschisă U_a a lui a, o vecinătate deschisă V_b a lui "b" şi o funcţie $\varphi : U_a \to V_b$ care are următoarele proprietăţi:

i) $\varphi(a) = b$

ii) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U_a$

iii) φ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe U_a şi diferenţiala lui φ este dată de:

$$d_x\varphi = -(d_y f_x)^{-1} \circ (d_x f_y)$$

unde: $f_x(y) = f(x, y)$, $f_y(x) = f(x, y)$ şi $y = \varphi(x)$.

Trebuie subliniat faptul că funcţia φ definită implicit, în general, nu poate fi exprimată în mod explicit.

Aplicaţie 54.1

a) Găsiţi funcţia $y = \varphi(x)$ definită implicit de ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$.

b) Arătaţi că ecuaţia $y^5 + y - x = 0$ defineşte implicit o funcţie $y = \varphi(x)$.

55 Diferenţială de ordin superior.

Fie funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcţie care are derivate parţiale pe mulţimea deschisă A, în raport cu fiecare variabilă x_j, $j = \overline{1,n}$.

Definiţia 55.1. *Funcţia f are derivate parţiale de ordinul al doilea în a în raport cu fiecare variabilă x_k dacă fiecare derivata parţială $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$ este derivabilă parţial în $a \in A$ în raport cu fiecare variabilă x_k,*
Derivata parţială în raport cu variabila x_k a derivatei parţiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$, i.e. $\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$ şi se numeşte derivata parţială de ordinul al doilea al funcţiei f.

Există n^2 derivate parţiale de ordinul al doilea.

Exemplu 55.1. Considerăm funcţia $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^x \cos y$, pentru care există derivatele parţiale de ordinul întâi în fiecare punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ şi sunt date de:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + e^x \cos y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - e^x \sin y$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui f au la rândul lor derivate parţiale şi în fiecare punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avem:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + e^x \cos y \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - e^x \cos y$$

Aceste derivate parţiale sunt derivatele parţiale de ordinul al doilea.

Definiţia 55.2. *În general, funcţia f are derivate parţiale de ordin k în $a \in A$ în raport cu toate variabilele, dacă f are derivate parţiale de ordin $(k-1)$ în raport cu toate variabilele pe o vecinătate deschisă a punctului a şi fiecare derivată parţială de ordinul $(k-1)$: $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}$ are derivate parţiale în a prin raport cu toate variabilele x_{j_k}.*
Derivata parţială $\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}})(a)$ va fi numită derivată parţială de ordinul k a lui f şi va fi notată cu:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}})(a)$$

Exemplu 55.2. Să se determine derivatele parţiale de ordinul 4 ale funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^x \cos y$.

Definiţia 55.3. *Dacă derivatele parţiale $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sunt diferenţiabile în punctul $a \in A$ atunci f este diferenţiabilă de două ori în punctul a.*

Definiţia 55.4. *Derivata (diferenţiala) Fréchet de ordinul al doilea a funcţiei f în punctul a este prin definiţie funcţia $d_a^2 f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definită cu formula:*

$$d_a^2 f(u)(v) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a) \cdot u_j \cdot v_k \right) e_i$$

$u, v \in \mathbb{R}^n$, $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, $i = \overline{1, m}$.

$d_a^2 f$ este un sistem ordonat de m forme biliniare în variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Teorema 55.1. *Derivata (diferenţiala) Fréchet de ordinul al doilea are proprietatea:*

$$\lim_{u \to 0} \frac{1}{\|u\|} \|d_{a+u} f(v) - d_a f(v) - d_a^2 f(u)(v)\| = 0, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Polinomul $d_{a+u} f$ se poate aproxima cu polinomul $d_a f + d_a^2 f(u)$.

Teorema 55.2. [de intervertire a ordinii de derivare; Schwarz.] *Dacă funcţia f este diferenţiabilă de două ori în a, atunci au loc următoarele egalităţi:*

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a) \qquad i = \overline{1, m} \quad j, k = \overline{1, n}$$

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Exemplu 55.3. În cazul funcţiei $f(x, y, z) = (xy + xz + yz, xyz)$ verificaţi egalităţile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

Teorema 55.3. [Criteriu de diferenţiabilitate de ordinul al doilea.] *Dacă derivatele parţiale de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ există pe o vecinătate deschisă a punctului a şi dacă acestea sunt funcţii continue în a, atunci f este diferenţiabilă de două ori în a.*

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Definiţia 55.5. *Dacă derivatele parţiale de ordinul $k-1$: $x \to \frac{\partial^{k-1} f_i}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}$ sunt diferenţiabile în $a \in A$, atunci zicem că f este diferenţiabilă de k ori în a şi derivata Fréchet de ordinul k a lui f în a este prin definiţie funcţia $d_a^k f : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,*

$$d_a^k f(u^1)(u^2) \cdots (u^k) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}}(a) \cdot u_{j_1}^1 u_{j_2}^2 \cdots u_{j_k}^k \right) e_i$$

Teorema 55.4. *Derivata Fréchet de ordinul k are următoarea proprietate:*

$$\lim_{\|u^k\| \to 0} \frac{1}{\|u^k\|} \|d_{a+u^k}^{k-1} f(u^1)(u^2) \cdots (u^{k-1}) - d_a^{k-1} f(u^1)(u^2) \cdots (u^{k-1}) - d_a^k f(u^1)(u^2) \cdots (u^k)\| = 0$$

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Teorema 55.5. [de permutare a ordinii de derivare] *Dacă funcţia f este diferenţiabilă de k-ori în a, atunci au loc următoarele egalităţi:*

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\cdots\partial x_{j_k}}(a) = \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{\sigma(j_1)}\partial x_{\sigma(j_2)}\cdots\partial x_{\sigma(j_k)}}(a)$$

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Teorema 55.6. [Criteriu de diferenţiabilitate de ordin k.] *Dacă funcţia f are derivate parţiale de ordinul k într-o vecinătate a punctului a şi acestea sunt funcţii continue în a, atunci f este diferenţiabilă de k-ori în a.*

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

56 Teoremele lui Taylor.

Teorema 56.1. [formula lui Taylor cu rest integral] *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ are derivate parţiale de ordinul $m+1$ continue pe mulţimea deschisă A ($A = \mathring{A}$) şi segmentul închis $[x, x+h]$ este inclus în A, atunci:*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{1}{1!}d_x f(h) + \frac{1}{2!}d_x^2 f(h)(h) + \cdots + \frac{1}{m!}d_x^m f\overbrace{(h)\cdots(h)}^{m} + \\ &+ \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m \cdot d_{x+th}^{m+1} f\overbrace{(h)\cdots(h)}^{m+1}\, dt \end{aligned}$$

Demonstraţie. Funcţia $g(t) = f(x+th)$ pentru $t \in [0,1]$ verifică relaţiile:

$$\frac{d^k g}{dt^k} = g^{(k)}(l) = d_{x+th}^k f\overbrace{(h)\cdots(h)}^{k} \qquad k = \overline{1, m+1}$$

Pe de altă parte ea verifică şi relaţiile:

$$\frac{d}{dt}[g(t) + \frac{1-t}{1!}g'(t) + \cdots + \frac{(1-t)^m}{m!}g^m(t)] = \frac{(1-t)^m}{m!}g^{m+1}(t)$$

$$g(1) - [g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \cdots + \frac{1}{m!}g^m(0)] = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m \cdot g^{m+1}(t)\, dt$$

De aici rezultă egalitatea:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{1}{1!}d_x f(h) + \frac{1}{2!}d_x^2 f(h)(h) + \cdots + \frac{1}{m!}d_x^m f\overbrace{(h)\cdots(h)}^{m} + \\ &+ \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m \cdot d_{x+th}^{m+1} f\overbrace{(h)\cdots(h)}^{m+1}\, dt \end{aligned}$$

□

Teorema 56.2. [formula lui Taylor cu restul lui Lagrange] *Dacă funcţia este diferenţiabilă de $m+1$ ori pe mulţimea deschisă A: $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $\|d_x^{m+1} f\| \leq M$ pe segmentul $[x, x+h] \subset A$ atunci are loc inegalitatea:*

$$\|f(x+h) - f(x) - \frac{1}{1!} d_x f(h) - \cdots - \frac{1}{m!} d_x^m f \overbrace{(h) \cdots (h)}^{m} \| \leq M \cdot \frac{\|h\|^{m+1}}{(m+1)!}$$

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Teorema 56.3. [formula lui Taylor cu restul 0 ($\|h\|^m$).] *Dacă funcţia f este diferenţiabilă de $(m-1)$ ori pe mulţimea deschisă A, este diferenţiabilă de m-ori în $x \in A$ şi segmentul $[x, x+h]$ este inclus în A, atunci are loc inegalitatea:*

$$\|f(x+h) - f(x) - \frac{1}{1!} d_x f(h) - \cdots - \frac{1}{m!} d_x^m f \overbrace{(h) \cdots (h)}^{m} \| = O(\|h\|^m)$$

Demonstraţie. Prin inducţie după m. □

57 Teoreme de clasificare a extremelor locale.

Teorema 57.1. *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to R^1$ are derivate parţiale continue de ordinul al doilea pe mulţimea deschisă A şi $d_a f = 0$ în punctul $a \in A$, atunci:*

i) dacă f are în a un minim local, atunci $d_a^2 f(h)(h) \geq 0$

ii) dacă f are în a un maxim local, atunci $d_a^2 f(h)(h) \leq 0$

Demonstraţie. Considerăm formula lui Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} d_a f(h) + \frac{1}{2!} d_a^2 f(h)(h) + O(\|h\|^2)$$

şi o scriem sub forma:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!} d_a^2 f(h)(h) + O(\|h\|^2)$$

i) dacă a este un punct de minim local pentru f, atunci există $r > 0$ cu proprietatea:

$$\|r\| < h \Longrightarrow f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!} d_a^2 f(h)(h) + O(\|h\|^2) \geq 0$$

pentru $h \in \mathbb{R}^n (h \neq 0)$ şi $t \in \mathbb{R}^1$ cu proprietatea $|t| < \dfrac{r}{\|h\|}$ avem

$$\frac{1}{2!} d_a^2 f(th)(th) + O(\|th\|^2) \geq 0$$

$$t^2 [\frac{1}{2!} d_a^2 f(h)(h) + \|h\|^2 \cdot \frac{O(\|th\|^2)}{\|th\|^2}] \geq 0$$

$$d_a^2 f(h)(h) + \|h\|^2 \cdot \frac{O(\|th\|^2)}{\|th\|^2} \geq 0$$

De aici rezultă inegalitatea $d_a^2 f(h)(h) \geq 0$.

ii) Cea de-a doua afirmaţie se demonstrează analog.

□

Teorema 57.2. [condiţie suficientă de extrem local] *Presupunem că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to R^1$ are derivate parţiale continue de ordinul al doilea pe mulţimea deschisă A şi $d_a f = 0$ într-un punct $a \in A$.*

i) Dacă $d_a^2 f(h)(h) \geq 0, \ \forall h \in \mathbb{R}^n$ şi $det(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)) \neq 0$, atunci f are în a un minim local;

ii) Dacă $d_a^2 f(h)(h) \leq 0, \ \forall h \in \mathbb{R}^n$ şi $det(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)) \neq 0$, atunci f are în a un maxim local.

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Exemplu 57.1. Determinaţi şi clasificaţi punctele staţionare ale funcţiei:

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 2(x^2 - y^2)$$

Exemplu 57.2. Determinaţi valorile lui k pentru care funcţia

$$f(x, y) = k(e^y - 1)\sin x - \cos x \cos 2y + 1$$

are minim local în $O = (0, 0)$.

Exemplu 57.3. Determinaţi şi găsiţi natura punctelor staţionare ale funcţiilor următoare:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10$;

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$;

c) $f(x, y) = \sin^2 x \cdot \cos y + \sin^2 y \cdot \cos x, \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi$.

58 Extreme condiţionate.

Fie funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, definită pe mulţimea deschisă A şi $\Gamma \subset A$ mulţimea::

$$\Gamma = \{x \in A \,|\, g_i(x) = 0 \quad i = \overline{1, p}\}$$

unde g_i sunt funcţii $g_i : A \to \mathbb{R}^1$, $p < n$.
Presupunem că f şi g_i, $i = \overline{1, p}$, $(p < n)$ au derivate parţiale continue pe A.

Definiţia 58.1. *Dacă restricţia $f_/\Gamma$ are extrem local într-un punct $a \in \Gamma$, zicem că acest extrem este un extrem condiţionat (legat) (de ecuaţiile $g_i(x) = 0 \quad i = \overline{1, p}$).*

Teorema 58.1. *Dacă diferenţialele $d_a g_1, \cdots, d_a g_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ sunt liniar independente şi f are în punctul a un extrem legat, atunci există p constante $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ cu următoarea proprietate:*

$$d_a f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i d_a g_i$$

sau echivalent

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a) \qquad k = \overline{1, n}$$

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică şi este omisă. □

Exemplu 58.1. Determinaţi extremele legate în următoarele cazuri:

a) $f(x, y) = x^3$, $g(x, y) = x^2 + 6xy + y^2 - 1$

b) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + 3y - 1$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x, y, z) = x + y + z - 1$

59 Integrala Riemann-Darboux dublă pe un interval bidimensional.

Integrala Riemann-Darboux pe un segment $[a, b]$ prezentată pentru funcţii reale de o variabilă reală poate fi generalizată cu uşurinţă la integrala Riemann-Darboux dublă pe un interval bidimensional pentru funcţii reale de două variabile reale.

Definiţia 59.1. *Se numeşte interval bidimensional real o mulţime $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ care are proprietatea:*

$$\Delta = [a, b] \times [c, d]$$

unde $[a, b]$ şi $[c, d]$ sunt segmente pe axa reală.

Definiţia 59.2. *O partiţie P a intervalului bidimensional Δ este o mulţime finită de intervale bidimensionale $\Delta_{ij}, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$, de forma:*

$$\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

unde:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b \quad \text{şi} \quad c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$$

Fie f o funcţie $f : \Delta \to \mathbb{R}$ mărginită pe Δ şi m, M astfel încât:

$$m \leq f(x, y) \leq M \qquad \forall (x, y) \in \Delta$$

Funcţia f este mărginită pe fiecare subinterval Δ_{ij} şi notăm cu:

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

Definiţia 59.3. *Suma superioară Darboux corespunzătoare partiţiei P este prin definiţie numărul:*

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Definiţia 59.4. *Suma inferioară Darboux corespunzătoare partiţiei P este prin definiţie numărul:*

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Propoziţia 59.1. *Oricare ar fi partiţia P a intervalului bidimensional Δ au loc următoarele inegalităţi:*

$$m(b-a)(d-c) \leq L_f(P) \leq U_f(P) \leq M(b-a)(d-c)$$

Demonstraţie. analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

Remarca 59.1. Propoziţia 59.1 arată că mulţimile

$$L_f = \{L_f(P)|P \text{ partiţie a intervalului } \Delta\}$$

$$U_f = \{U_f(P)|P \text{ partiţie a intervalului } \Delta\}$$

sunt mărginite.

Fie $\mathcal{L}_f = \sup L_f$ şi $\mathcal{U}_f = \inf U_f$.

Propoziţia 59.2. *Are loc inegalitatea:*

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

Demonstraţie. asemănătoare cu cea din cazul unidimensional. □

Definiţia 59.5. *O funcţie mărginită $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe Δ dacă $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$. Această valoare comună se notează cu:*

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

şi se numeşte integrala dublă Riemann-Darboux a funcţiei f pe intervalul Δ.

Teorema 59.1. *Dacă funcţiile mărginite $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann-Darboux pe Δ atunci toate integralele care apar în relaţiile următoare există şi relaţiile sunt adevărate:*

(1) $\displaystyle\iint_{\Delta} (\alpha f + \beta g)\,dx\,dy = \alpha \iint_{\Delta} f\,dx\,dy + \beta \iint_{\Delta} g\,dx\,dy$

(2) $\displaystyle\iint_{\Delta} f\,dx\,dy = \iint_{\Delta_1} f\,dx\,dy + \iint_{\Delta_2} f\,dx\,dy$

pentru orice descompunere $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, Δ_1, Δ_2 intervale cu $\mathring{\Delta}_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$

(3) dacă $f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in \Delta$ *atunci* $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_{\Delta} g(x,y)\,dx\,dy$

(4) $|\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy| \leq \iint\limits_{\Delta} |f(x,y)|\,dx\,dy$

Demonstraţie. analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

Remarca 59.2. Dacă $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este mărginită şi integrabilă pe Δ atunci f este integrabilă pe orice subinterval $\Delta' \subset \Delta$. Mai mult, dacă $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup ... \cup \Delta_n$, unde Δ_i sunt intervale cu proprietatea $\Delta_i^\circ \cap \Delta_j^\circ = \emptyset, \forall i \neq j$ atunci:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Delta_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorema 59.2. *Dacă* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* Δ *atunci* f *este integrabilă Riemann-Darboux pe* Δ*.*

Demonstraţie. analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

Definiţia 59.6. *O funcţie* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *se zice continuă pe porţiuni dacă există o partiţie* $P = \{\Delta_1, ..., \Delta_n\}$ *a intervalului* Δ *şi funcţiile continue* $f_i : \Delta_i \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$ *astfel încât* $f(x,y) = f_i(x,y), \forall (x,y) \in \mathring{\Delta}_i$*.*

Teorema 59.3. *O funcţie continuă pe porţiuni este integrabilă Riemann-Darboux şi are loc egalitatea:*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Delta_i} f_i(x,y)\,dx\,dy$$

Demonstraţie. analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

Teorema 59.4 (Teorema de medie in cazul bidimensional)**.** *Dacă funcţiile* $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ *sunt continue şi* $g(x,y) \geq 0$ *oricare ar fi* $(x,y) \in \Delta$ *atunci există* $(\xi, \eta) \in \Delta$ *astfel încât:*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y) \cdot g(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta) \cdot \iint\limits_{\Delta} g(x,y)\,dx\,dy$$

Demonstraţie. analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

Consecinţa 59.1. *Dacă* f *este continuă pe* Δ *atunci există* $(\xi, \eta) \in \Delta$ *astfel încât:*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)(b-a)(d-c)$$

60 Calculul integralei Riemann-Darboux duble pe un interval bidimensional.

Dorim să arătăm că în anumite condiţii calculul integralei duble pe un interval bidimensional se reduce la calcularea succesivă a integralelor unor funcţii de o singură variabilă. Fie $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ un interval bidimensional şi $f : \Delta \to \mathbb{R}$.

Teorema 60.1. *Dacă funcţia f este integrabilă pe Δ şi dacă pentru orice $x \in [a, b]$ (x - fixat) funcţia $f_x(y) = f(x, y)$ este integrabilă pe $[c, d]$, adică:*

$$I(x) = \int_c^d f_x(y)\,dy = \int_c^d f(x, y)\,dy$$

există, atunci integrala succesivă:

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\,dy)\,dx$$

există de asemenea şi are loc egalitatea:

$$\iint_\Delta f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\,dy)\,dx$$

Demonstraţie. Se consideră partiţiile:

$$P_x = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\} \text{ a lui } [a, b]$$

şi

$$P_y = \{c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d\} \text{ a lui } [c, d]$$

Mulţimea de intervale bidimensionale $P = \{\Delta_{ij}\}$, unde $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$, este o partiţie a lui Δ.
Notăm:

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

Pentru $(x, y) \in \Delta_{ij}$ avem $m_{ij} \le f(x, y) \le M_{ij}, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$.
Rezultă:

$$m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\,dy \le M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1})$$

$i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n, x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Deducem de aici inegalităţile:

$$\begin{aligned} m_{ij}\cdot(y_j-y_{j-1}) &\leq \inf_x\{\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy | x\in[x_{i-1},x_i]\} \leq \\ &\leq \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leq \sup_x\{\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy | x\in[x_{i-1},x_i]\} \leq \\ &\leq M_{ij}\cdot(y_j-y_{j-1}) \end{aligned}$$

şi înmulţind cu $(x_i - x_{i-1})$ obţinem:

$$\begin{aligned} m_{ij}\cdot(y_j-y_{j-1})(x_i-x_{i-1}) &\leq (x_i-x_{i-1})\cdot\inf_x\{\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy | x\in[x_{i-1},x_i]\} \leq \\ &\leq (x_i-x_{i-1})\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leq \\ &\leq (x_i-x_{i-1})\cdot\sup_x\{\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy | x\in[x_{i-1},x_i]\} \leq \\ &\leq M_{ij}\cdot(y_j-y_{j-1})(x_i-x_{i-1}). \end{aligned}$$

Prin însumare după i, j rezultă:

$$L_f(P) \leq L_{I(x)}(P_x) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leq U_{I(x)}(P_x) \leq U_f(P)$$

Întrucât:

$$\sup L_f(P) = \inf U_f(P) = \iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$$

rezultă că:

$$\sup L_{I(x)}(P_x) = \inf U_{I(x)}(P_x) = \int\limits_a^b(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy)\,dx$$

şi obţinem egalitatea:

$$\iint\limits_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy)\,dx$$

□

Remarca 60.1. Schimbând rolul lui x cu rolul lui y obţinem următoarea afirmaţie: Dacă f este integrabilă Riemann-Darboux pe Δ şi dacă pentru orice y fixat funcţia

$f_y(x) = f(x,y)$ este integrabilă pe $[a,b]$ atunci integrala succesivă $\int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x,y)\,dx)\,dy$ există şi are loc egalitatea:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x,y)\,dx)\,dy$$

Teorema 60.2. *Dacă $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este continuă atunci funcţia:*

$$F(x,y) = \iint\limits_{[a,x]\times[c,y]} f(u,v)\,du\,dv$$

definită pentru $(x,y) \in \Delta$ este de clasă C^1 pe Δ.
În plus, derivata parţială de ordinul al doilea $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ există şi are loc egalitatea:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Delta$$

Demonstraţie. Funcţia $F(x,y)$ se reprezintă sub forma:

$$F(x,y) = \int\limits_a^x \int\limits_c^y f(u,v)\,du\,dv = \int\limits_a^x (\int\limits_c^y f(u,v)\,dv)\,du = \int\limits_c^y (\int\limits_a^x f(u,v)\,du)\,dv$$

$\square$

Teorema 60.3. *Dacă există o funcţie $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ astfel încât:*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

atunci are loc egalitatea:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \Phi(a,c) - \Phi(b,c) + \Phi(b,d) - \Phi(a,d)$$

Demonstraţie. Se consideră partiţiile:

$$P_x = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\} \text{ a lui } [a,b]$$

şi

$$P_y = \{c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d\} \text{ a lui } [c,d]$$

şi apoi partiţia $P = \{\Delta_{ij}\}$, $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n.$
Pentru evaluarea expresiei:

$$E = \Phi(x_i, y_j) - \Phi(x_i, y_{j-1}) - \Phi(x_{i-1}, y_j) + \Phi(x_{i-1}, y_{j-1})$$

se aplică de două ori Teorema de medie şi se obţine:

$$E = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

unde $x_{i-1} \leq \xi_{ij} \leq x_i$ şi $y_{j-1} \leq \eta_{ij} \leq y_j$.
De aici rezultă:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Phi(a, c) - \Phi(b, c) + \Phi(b, d) - \Phi(a, d)$$

şi egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy = \Phi(a, c) - \Phi(b, c) + \Phi(b, d) - \Phi(a, d)$$

□

61 Integrala Riemann-Darboux dublă pe o mulţime măsurabilă Jordan.

Vom prezenta o cale de extindere a conceptului de integrală Riemann-Darboux dublă pe mulţimi care nu sunt neapărat intervale bidimensionale. Întrucât acest concept (deja creionat în cazul intervalelor bidimensionale) utilizează aria dreptunghiului (intervalului bidimensional) va trebui să luăm în considerare submulţimi ale lui $\mathbb{R}^2$ care au arie şi partiţii ale căror elemente au arie. Vom identifica o clasă de submulţimi ale lui $\mathbb{R}^2$ care au această proprietate şi le vom numi *mulţimi măsurabile Jordan*.
Considerăm mulţimea intervalelor unidimensionale mărginite deschise (forma (a, b)), închise (forma $[a, b]$), deschise la stânga şi închise la dreapta (forma $(a, b]$), închise la stânga şi deschise la dreapta (forma $[a, b)$). Produsul cartezian $\Delta = I^1 \times I^2$ a două intervale I^1, I^2 de acest fel va fi numit interval bidimensional sau dreptunghi. Astfel, mulţimile $\Delta_1 = (a, b) \times [c, d]$, $\Delta_2 = [a, b) \times (c, d]$, $\Delta_3 = (a, b) \times (c, d)$, $\Delta_4 = [a, b) \times [c, d)$ etc sunt dreptunghiuri în $\mathbb{R}^2$. Aria dreptunghiului $\Delta = I^1 \times I^2$ este prin definiţie AriaΔ=lungimea$I^1\cdot$ lungimeaI^2, Aria$\Delta_1 = (b - a) \cdot (d - c)$; Aria$\Delta_2 = (b - a) \cdot (d - c)$.
Considerăm mulţimea $\mathcal{C}$ a reuniunilor finite de intervale bidimensionale Δ:

$$\mathcal{C} = \{C \mid C = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i,\ \Delta_i - \text{ interval bidimensional } \}$$

.

Propoziţia 61.1. *Mulţimea $\mathcal{C}$ are următoarele proprietăţi:*

a) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$;

b) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{C}$;

c) $\forall\ C \in \mathcal{C}$ *există un număr finit de intervale bidimensionale* $\Delta_1, ..., \Delta_n$ *astfel ca* $C = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ *şi* $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Demonstraţie. a) Este evidentă;

b) Se reduce la a arăta că diferenţa a două intervale bidimensionale este o reuniune finită de intervale bidimensionale.

c) este tehnică şi este omisă.

$\square$

Definiţia 61.1. *Pentru $C \in \mathcal{C}$ definim aria cu formula:*

$$aria(C) = \sum_{i=1}^{n} aria(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \cdot (d_i - c_i)$$

unde $C = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ *şi* $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Această definiţie a ariei nu depinde de reprezentarea lui C sub formă de reuniune finită de intervale bidimensionale disjuncte.

Propoziţia 61.2. *Aria definită în acest fel pentru orice $C \in \mathcal{C}$ are următoarele proprietăţi:*

1) $aria(C) > 0$ pentru orice $C \in \mathcal{C}$;

2) dacă $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ şi $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ atunci $aria(C_1 \cup C_2) = aria(C_1) + aria(C_2)$

Demonstraţie. Imediată $\square$

Definiţia 61.2. *Pentru o mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}^2$ definim aria interioară $aria_i(A)$ şi aria exterioară $aria_e(A)$ astfel:*

$$aria_i(A) = \sup_{C \in \mathcal{C}} \{aria(C) \mid C \subset A\} \text{ şi } aria_e(A) = \inf_{C \in \mathcal{C}} \{aria(C) \mid C \supset A\} .$$

Definiţia 61.3. *O mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}^2$ este măsurabilă Jordan dacă:*

$$aria_i(A) = aria_e(A)$$

Definiţia 61.4. *Dacă mulţimea mărginită $A \subset \mathbb{R}^2$ este măsurabilă Jordan atunci aria mulţimii A, $aria(A)$, este prin definiţie numărul:*

$$aria(A) = aria_i(A) = aria_e(A)$$

Propoziţia 61.3. *Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) A este măsurabilă Jordan.

2) $\forall \varepsilon > 0$ există $C_\varepsilon^1,\ C_\varepsilon^2 \in \mathcal{C}$ astfel încât $C_\varepsilon^1 \subset A \subset C_\varepsilon^2$ şi

$$aria(C_\varepsilon^2) - aria(C_\varepsilon^1) < \varepsilon.$$

3) există două şiruri (C_n^1), (C_n^2), C_n^1, $C_n^2 \in \mathcal{C}$ *astfel încât* $C_n^1 \subset A \subset C_n^2$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty} aria(C_n^1) = \lim_{n\to\infty} aria(C_n^2)$$

4) $aria(Fr\ A) = 0$

5) $\forall\, \varepsilon > 0$ *există* A_ε, B_ε *măsurabile Jordan astfel încât* $A_\varepsilon \subset A \subset B_\varepsilon$ *şi*

$$aria(B_\varepsilon) - aria(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

6) există două şiruri (A_n), (B_n) *de mulţimi măsurabile Jordan astfel încât* $A_n \subset A \subset B_n$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty} aria(A_n) = \lim_{n\to\infty} aria(B_n)$$

Demonstraţie. Aceste echivalenţe au demonstraţie tehnică. □

Propoziţia 61.4. *Dacă mulţimile* A_1 *şi* A_2 *sunt măsurabile Jordan, atunci mulţimile* $A_1 \cup A_2$, $A_1 \setminus A_2$ *şi* $A_1 \cap A_2$ *sunt măsurabile Jordan şi dacă* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$*, atunci:*

$$aria(A_1 \cup A_2) = aria(A_1) + aria(A_2)$$

Demonstraţie. Este demonstraţie tehnică. □

Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime mărginită, măsurabilă Jordan.

Definiţia 61.5. *O partiţie* P *a mulţimii* A *este o mulţime finită de submulţimi* A_i, $i = 1, 2, ..., n$ *a mulţimii* A *care satisface următoarele condiţii:*

1) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$*;*

2) fiecare mulţime A_i *este măsurabilă Jordan;*

3) dacă $i \neq j$ *atunci* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *.*

Norma partiţiei P este numărul $\nu(P) = \max\{d_1, \ldots, d_n\}$, unde $d_i = \sup\limits_{x,y\in A_i} \|x - y\|$.

Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi m, M astfel încât:

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in A$$

Funcţia f este mărginită pe fiecare mulţime $A_i \in P$ şi fie

$$m_i = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_i\},\ M_i = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_i\}$$

Definiţia 61.6. *Suma superioară Darboux a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este:*

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot aria(A_i)$$

Suma inferioară Darboux a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot aria(A_i)$$

Definiţia 61.7. *Suma Riemann a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este numărul:*

$$\sigma_f(P) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i, y_i) \cdot aria(A_i).$$

Remarca 61.1. Suma Riemann $\sigma_f(P)$ depinde şi de alegerea punctelor $(\xi_i, \eta_i) \in A_i$. Indiferent însă de alegerea acestor puncte avem:

$$m \cdot aria(A) \leq L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P) \leq M \cdot aria(A)$$

Rezultă din aceste inegalităţi că mulţimile:

$$L_f = \{L_f(P) \mid P \text{ este partiţie a lui } A\}$$

$$U_f = \{U_f(P) \mid P \text{ este partiţie a lui } A\}$$

sunt mărginite.
Fie $\mathcal{L}_f = \sup L_f$ şi $\mathcal{U}_f = \inf U_f$.

Propoziţia 61.5. *Are loc inegalitatea:*

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

Demonstraţie. Fie P o partiţie a lui A şi P' partiţia $P' = P \cup \{A_i', A_i''\}$, unde $A_i' \cup A_i'' = A_i$ pentru un anumit i fixat, A_i', A_i'' sunt măsurabile Jordan şi $A_i' \cap A_i'' = \emptyset$. Vom arăta că au loc următoarele inegalităţi:

$$L_f(P) \leq L_f(P') \text{ şi } U_f(P) \geq U_f(P')$$

Considerăm în acest scop numerele:

$$M_i' = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i'\} \qquad M_i'' = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i'\}$$

şi remarcăm că $M_i' \leq M_i, M_i'' \leq M_i$. Rezultă:

$$\begin{aligned}
U_f(P') &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j \cdot aria(A_j) + M_i' \cdot aria(A_i') + M_i'' \cdot aria(A_i'') + \sum_{j=i+1}^{n} M_j \cdot aria(A_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{i-1} M_j \cdot aria(A_j) + M_i \cdot aria(A_i') + M_i \cdot aria(A_i'') + \sum_{j=i+1}^{n} M_j \cdot aria(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot aria(A_j) = U_f(P)
\end{aligned}$$

Asemănator se arată că are loc:

$$L_f(P) \leq L_f(P')$$

Rezultă pe această bază că dacă $P'' = P \cup \{A_{i_1}'', ..., A_{i_m}''\}$, atunci:

$$L_f(P) \leq L_f(P'') \quad \text{şi} \quad U_f(P'') \leq U_f(P)$$

Dacă P_1 şi P_2 sunt două partiţii ale lui A:

$$P_1 = \{A_1, A_2, ..., A_m\} \quad \text{şi} \quad P_2 = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$$

atunci considerăm partiţia:

$$P_3 = \{A_i \cap B_j \mid i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\}$$

Rezultă

$$L_f(P_1) \leq L_f(P_3) \leq U_f(P_3) \leq U_f(P_2)$$

Cu alte cuvinte, suma inferioară corespunzătoare unei partiţii a lui A nu poate depăşi suma superioară corespunzătoare la orice partiţie a lui A. Orice sumă inferioară este margine inferioară pentru mulţimea sumelor superioare.
Astfel, $L_f(P) \leq \mathcal{U}_f$ pentru orice partiţie P. De aici rezultă:

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

□

Definiţia 61.8. *Funcţia mărginită $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A dacă*

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

Această valoare comună se numeşte integrala Riemann-Darboux dublă a lui f şi se notează cu

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

Teorema 61.1. *Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P astfel încât să avem:*

$$U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$$

Demonstraţie. Rezultă imediat în baza Propoziţiei 61.5 □

Teorema 61.2. *Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A dacă şi numai dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ atfel încât pentru orice partiţie P cu $\nu(P) < \delta$ rezultă că suma Riemann $\sigma_f(P)$ are proprietatea:*

$$|\sigma_f(P) - I| < \varepsilon$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă în baza teoremei precedente şi a inegalităţii

$$L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P)$$

□

Remarca 61.2. Funcţia constantă $f(x,y) = 1$ este integrabilă Riemann-Darboux pe o mulţime măsurabilă Jordan A şi are loc:

$$\iint\limits_A dx\,dy = aria(A)$$

Teorema 61.3. *Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile Riemann-Darboux pe mulţimea măsurabilă Jordan A, atunci toate integralele care apar în relaţiile de mai jos există şi relaţiile sunt adevărate:*

(1) $\displaystyle\iint\limits_A (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \iint\limits_A f + \beta \iint\limits_A g$

(2) $\displaystyle\iint\limits_A f = \iint\limits_{A_1} f + \iint\limits_{A_2} f$, *unde* $A_1 \cup A_2 = A$ *şi* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

(3) dacă $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$ *atunci*

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_A g(x,y)\,dx\,dy$$

(4) $\displaystyle|\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy| \leq \iint\limits_A |f(x,y)|\,dx\,dy$

Demonstraţie. Analoagă cu cea făcută pentru integrale pe interval bidimensional. □

Remarca 61.3. Dacă f este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi mulţimea $A_1 \subseteq A$ este măsurabilă Jordan, atunci f este integrabilă Riemann-Darboux pe A_1.

Mai mult, dacă $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ şi $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, atunci:

$$\iint\limits_A f = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{A_i} f$$

Teorema 61.4. *Dacă* $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ *este continuă şi* $\overline{A}$ *este măsurabilă Jordan atunci* f *este integrabilă Riemann-Darboux pe* $\overline{A}$.

Demonstraţie. Analoagă cu cea făcută pentru intervale bidimensionale. □

Definiţia 61.9. *O funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *se zice continuă pe porţiuni dacă există o partiţie* $P = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *a lui* A *şi funcţiile continue* $f_i : A_i \to \mathbb{R} \quad i = 1, 2, ..., n$, *astfel încât:*

$$f(x,y) = f_i(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathring{A}_i$$

Teorema 61.5. *O funcţie* $f : A \to \mathbb{R}$ *continuă pe porţiuni este integrabilă Riemann-Darboux pe mulţimea măsurabilă Jordan* A *şi are loc egalitatea:*

$$\iint\limits_A f = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{A_i} f_i$$

Demonstraţie. Analoagă cu cea pentru integrala pe intervale bidimensionale. $\square$

Teorema 61.6. *Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A, atunci:*

$$m \cdot aria(A) \leq \iint\limits_A f \leq M \cdot aria(A)$$

unde:

$$m = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in A\} \qquad M = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in A\}$$

Demonstraţie. Imediată. $\square$

Remarca 61.4. Teorema de medie enunţată pentru integrala dublă pe un interval bidimensional nu mai este adevărată.
De exemplu, fie $A = [0,1] \times [0,1] \cup [2,4] \times [2,4]$ şi funcţia $f(x,y) = 1$ pentru $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ şi $f(x,y) = 2$ pentru $(x,y) \in [2,4] \times [2,4]$. Avem:

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f + \iint\limits_{[2,4]\times[2,4]} f = 1 + 8 = 9$$

iar $aria(A) = 1 + 4 = 5$.
Egalitatea $\iint\limits_A f = f(\xi,\eta) \cdot aria(A)$ ar însemna

$$9 = f(\xi,\eta) \cdot 5 \quad \text{adică} \quad f(\xi,\eta) = \frac{9}{5} \quad ,$$

imposibil.

62 Calculul integralei Riemann-Darboux duble pe o mulţime măsurabilă Jordan.

Dorim să arătăm că în anumite condiţii calculul integralei duble pe o mulţime măsurabilă Jordan se reduce la calcularea sucesivă a integralelor unor funcţii de o singură variabilă.

Fie A o mulţime măsurabilă Jordan cu proprietatea următoare: există $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a,b]$ şi

$$A = \{(x,y) \mid x \in [a,b] \quad \text{şi} \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Teorema 62.1. *Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi dacă pentru orice $x \in [a,b]$, x - fixat, funcţia $f_x(y) = f(x,y)$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[g(x), h(x)]$, adică există*

$$I(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f_x(y)\,dy = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

atunci integrala succesivă:

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

există de asemenea şi are loc egalitatea:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

Demonstraţie. Putem demonstra această afirmaţie reducând-o la cazul intervalelor bidimensionale pentru care am văzut că ea este adevărată. Iată cum procedăm:
Considerăm

$$m = \inf\{g(x) \mid x \in [a,b]\} \quad \text{şi} \quad M = \sup\{h(x) \mid x \in [a,b]\}$$

şi intervalul bidimensional $[a,b] \times [m,M] = \Delta$.
Pe acest interval Δ considerăm funcţia $F : \Delta \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in A \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) \in \Delta \setminus A \end{cases}$$

Funcţia F este integrabilă Riemann-Darboux pe Δ şi avem:

$$\iint_\Delta F = \iint_A F + \iint_{\Delta \setminus A} F$$

În continuare pentru funcţia F aplicăm teorema de integrare succesivă stabilită în cazul intervalelor bidimensionale şi găsim:

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta F(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \Big(\int_m^M F(x,y)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int_a^b \Big(\int_m^{g(x)} F(x,y)\,dy + \int_{g(x)}^{h(x)} F(x,y)\,dy + \int_{h(x)}^{M} F(x,y)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx
\end{aligned}$$

Rezultă în acest fel egalitatea:

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

□

Remarca 62.1. Fie A o mulţime măsurabilă Jordan cu următoarea proprietate: există $g, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $g(y) \leq h(y) \quad \forall y \in [c, d]$ şi

$$A = \{(x, y) \mid y \in [c, d] \quad \text{şi} \quad g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Dacă o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi are proprietatea că pentru orice $y \in [c, d]$, y - fixat, funcţia $f_y(x) = f(x, y)$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[g(y), h(y)]$, adică există

$$I(y) = \int\limits_{g(y)}^{h(y)} f_y(x)\, dx = \int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx$$

atunci integrala succesivă:

$$\int\limits_{c}^{d} I(y)\, dy = \int\limits_{c}^{d} (\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx)\, dy$$

există de asemenea şi are loc egalitatea:

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{c}^{d} (\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx)\, dy$$

Remarca 62.2. Fie A o mulţime măsurabilă Jordan cu următoarele proprietăţi:

- există $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$ şi

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \quad \text{şi} \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

- există $l, k : [c, d] \to \mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $l(y) \leq k(y) \quad \forall y \in [c, d]$ şi

$$A = \{(x, y) \mid y \in [c, d] \quad \text{şi} \quad l(y) \leq x \leq k(y)\}$$

Oricare ar fi funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann-Darboux pe A cu proprietatea că pentru orice $x \in [a, b]$, x - fixat, funcţia $f_x(y) = f(x, y)$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[g(x), h(x)]$ şi pentru orice $y \in [c, d]$, y - fixat, funcţia $f_y(x) = f(x, y)$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[l(y), k(y)]$, integralele succesive

$$\int\limits_{a}^{b} (\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy)\, dx \quad \text{şi} \quad \int\limits_{c}^{d} (\int\limits_{l(y)}^{k(y)} f(x, y)\, dx)\, dy$$

există şi au loc egalităţile:

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{a}^{b} (\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy)\, dx = \int\limits_{c}^{d} (\int\limits_{l(y)}^{k(y)} f(x, y)\, dx)\, dy$$

Teorema 62.2 (Calculul ariei lui $g(A)$). *Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă măsurabilă Jordan şi $g : A \to g(A) = B \subset \mathbb{R}^2$ o funcţie bijectivă g de clasă C^1 şi cu inversa de clasă C^1. Mulţimea deschisă B este măsurabilă Jordan şi are loc egalitatea:*

$$aria(B) = \iint\limits_A \left| \frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} \right| dx\, dy$$

Demonstraţie. Notăm cu g^x, g^y componentele scalare ale difeomorfismului g, $g(x, y) = (g^x(x, y), g^y(x, y))$ şi considerăm determinantul matricii Jacobi a difeomorfismului g, adică determinantul:

$$\frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g^x}{\partial x} & \dfrac{\partial g^x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g^y}{\partial x} & \dfrac{\partial g^y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Dacă $P_A = \{A_1, ..., A_n\}$ este o partiţie a lui A, atunci $P_B = \{B_1, ..., B_n\}$, $B_i = g(A_i)$, este o partiţie a mulţimii $B = g(A)$. În plus, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P_A (suficient de fină) astfel încât să avem:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} aria(B_i) - \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)}(\xi_i, \eta_i) \right| aria(A_i) \right| < \varepsilon$$

unde $(\xi_i, \eta_i) \in A_i$. Rezultă de aici egalitatea din enunţ.

□

Teorema 62.3 (Schimbarea de variabilă). *Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă măsurabilă Jordan şi $g : A \to g(A) = B \subset \mathbb{R}^2$ o funcţie bijectivă g de clasă C^1 şi cu inversa de clasă C^1. Dacă funcţia $f : B \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe B, atunci funcţia $(f \circ g) \cdot |\frac{D(g^x, g^y)}{D(x,y)}| : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi are loc egalitatea:*

$$\iint\limits_B f(X, Y)\, dX\, dY = \iint\limits_A f(g^x(x, y), g^y(x, y)) \cdot \left| \frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} \right| dx\, dy$$

Demonstraţie. Asemănătoare cu cea a Teoremei 62.2. □

63 Integrala Riemann-Darboux pe o mulţime n-dimensională măsurabilă Jordan.

Vom prezenta o cale de extindere a conceptului de integrală pe o mulţime bidimensională măsurabilă Jordan pe mulţimi n-dimensionale. Întrucât în dimensiunea doi conceptul de integrală Riemann-Darboux utilizează conceptul de arie va trebui să luăm în considerare submulţimi ale lui $\mathbb{R}^n$ care au "volum" şi partiţii ale căror elemente au "volum". La început vom identifica o clasă de asemenea mulţimi şi le vom numi mulţimi n-dimensionale măsurabile Jordan.

Considerăm mulţimea intervalelor unidimensionale mărginite deschise (forma (a, b)), închise (forma $[a, b]$), deschise la stânga şi închise la dreapta (forma $(a, b]$), închise la stânga şi deschise la dreapta (forma $[a, b)$). Produsul cartezian $\Delta = I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n$ a n intervale $I^1, I^2, \ldots, I^n$ de acest fel va fi numit interval n dimensional sau paralelipiped. Astfel mulţimile $\Delta_1 = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, $\Delta_2 = (a_1, b_1) \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n)$ etc. sunt paralelipipezi în $\mathbb{R}^n$. Volumul paralelipipedului $\Delta = I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n$ este prin definiţie $vol(\Delta) = lung(I^1) \cdot lung(I^2) \ldots \cdot lung(I^n)$, $vol(\Delta_1) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$, $vol(\Delta_2) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.
Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea reuniunilor finite de intervale n-dimensionale Δ:

$$\mathcal{C} = \{C \mid C = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i, \quad \Delta_i \; - \; \text{interval } n \text{ dimensional}\}$$

Propoziţia 63.1. *Mulţimea $\mathcal{C}$ are următoarele proprietăţi:*

a) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$;

b) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{C}$;

c) $\forall\ C \in \mathcal{C}$ *există un număr finit de intervale n-dimensionale $\Delta_1, ..., \Delta_m$ astfel ca* $C = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$ *şi* $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Demonstraţie. a) Este evidentă.

b) Revine la a arăta că diferenţa a două intervale n-dimensionale este o reuniune finită de intervale n-dimensionale.

c) este tehnică şi este omisă.

□

Definiţia 63.1. *Pentru $C \in \mathcal{C}$ definim volumul cu formula*

$$vol(C) = \sum_{i=1}^{m} vol(\Delta_i)$$

unde $C = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$ *şi* $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ *pentru* $i \neq j$.

Acest concept de volum nu depinde de reprezentarea lui C sub formă de reuniune finită de intervale n-dimensionale disjuncte.

Propoziţia 63.2. *Volumul definit în acest fel pentru orice $C \in \mathcal{C}$ are următoarele proprietăţi:*

1) $vol(C) > 0 \qquad \forall C \in \mathcal{C}$;

2) dacă $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ *şi* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ *atunci*

$$vol(C_1 \cup C_2) = vol(C_1) + vol(C_2)$$

Demonstrație. Imediată. $\square$

Definiţia 63.2. *Pentru o mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}^n$ definim volumul interior $vol_i(A)$ şi volumul exterior $vol_e(A)$ astfel*

$$vol_i(A) = \sup_{C \in \mathcal{C},\, C \subset A} vol(C) \qquad vol_e(A) = \inf_{C \in \mathcal{C},\, C \supset A} vol(C)$$

Definiţia 63.3. *O mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}^n$ este măsurabilă Jordan dacă*

$$vol_i(A) = vol_e(A)$$

Definiţia 63.4. *Dacă mulţimea mărginită $A \subset \mathbb{R}^n$ este măsurabilă Jordan, atunci "volumul" mulţimii A, $vol(A)$ este ,prin definiţie, numărul*

$$vol(A) = vol_i(A) = vol_e(A)$$

Propoziţia 63.3. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) A este măsurabilă Jordan.

2) $\forall\, \varepsilon > 0$ există $C_\varepsilon^1,\ C_\varepsilon^2 \in \mathcal{C}$ astfel încât $C_\varepsilon^1 \subset A \subset C_\varepsilon^2$ şi

$$vol(C_\varepsilon^2) - vol(C_\varepsilon^1) < \varepsilon.$$

3) există două şiruri (C_k^1), (C_k^2), $C_k^1,\ C_k^2 \in \mathcal{C}$ astfel încât $C_k^1 \subset A \subset C_k^2$ şi

$$\lim_{k \to \infty} vol(C_k^1) = \lim_{k \to \infty} vol(C_k^2)$$

4) $vol(Fr\ A) = 0$

5) $\forall\, \varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon,\ B_\varepsilon$ măsurabile Jordan astfel încât $A_\varepsilon \subset A \subset B_\varepsilon$ şi

$$vol(B_\varepsilon) - vol(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

6) există două şiruri (A_k), (B_k) de mulţimi măsurabile Jordan astfel încât $A_k \subset A \subset B_k$ şi

$$\lim_{k \to \infty} vol(A_k) = \lim_{k \to \infty} vol(B_k)$$

Propoziţia 63.4. *Dacă mulţimile $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ sunt măsurabile Jordan, atunci mulţimile $A_1 \cup A_2$, $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \cap A_2$ sunt măsurabile Jordan şi, dacă $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, atunci:*

$$vol(A_1 \cup A_2) = vol(A_1) + vol(A_2)$$

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită şi măsurabilă Jordan.

Definiţia 63.5. *O partiţie P a mulţimii A este o mulţime finită de submulţimi A_i, $i = 1, 2, ..., m$ ale mulţimii A care satisfac următoarele condiţii:*

1) $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$;

2) fiecare mulţime A_i este măsurabilă Jordan;

3) dacă $i \neq j$ atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Norma partiţiei P este numărul $\nu(P) = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ unde $d_i = \sup\limits_{x,y \in A_i} \|x - y\|$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in A\} \quad M = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$$

Funcţia f este mărginită pe fiecare mulţime $A_i \in P$ şi fie:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$$

Definiţia 63.6. *Suma superioară Darboux a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este:*

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot vol(A_i)$$

Suma inferioară Darboux a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot vol(A_i)$$

Definiţia 63.7. *Suma Riemann a funcţiei f corespunzătoare partiţiei P este numărul:*

$$\sigma_f(P) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot vol(A_i)$$

unde $\xi_i \in A_i$.

Remarca 63.1. Suma Riemann $\sigma_f(P)$ depinde şi de alegerea punctelor $\xi_i \in A_i$. Indiferent însă de alegerea acestor puncte avem:

$$m \cdot vol(A) \leq L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P) \leq M \cdot vol(A)$$

Rezultă din aceste inegalităţi că mulţimile:

$$L_f = \{L_f(P) \mid P \text{ este partiţie a lui } A\}$$

$$U_f = \{U_f(P) \mid P \text{ este partiţie a lui } A\}$$

sunt mărginite.
Fie $\mathcal{L}_f = \sup L_f$ şi $\mathcal{U}_f = \inf U_f$.

Propoziţia 63.5. *Are loc inegalitatea:*

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

Demonstraţie. Analoagă cu cea făcută în dimensiunea doi. □

Definiţia 63.8. *Funcţia mărginită $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A dacă*

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

Această valoare comună se numeşte integrala Riemann-Darboux n-dimensională a lui f pe A şi se notează cu

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ ori}} f(x_1, ..., x_m)\, dx_1 ...\, dx_m = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

Teorema 63.1. *Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P astfel încât să avem:*

$$U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$$

Demonstraţie. Rezultă imediat în baza Propoziţiei 63.5. □

Teorema 63.2. *Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A dacă şi numai dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice partiţie P şi cu $\nu(P) < \delta$ suma Riemann $\sigma_f(P)$ verifică:*

$$|\sigma_f(P) - I| < \varepsilon$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă în baza teoremeii precedente şi a inegalităţii

$$L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P)$$

□

Remarca 63.2. Funcţia constantă $f(x_1, ..., x_m) = 1$ este integrabilă Riemann-Darboux pe o mulţime măsurabilă Jordan A şi are loc:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ ori}} dx_1 ...\, dx_m = vol(A)$$

Teorema 63.3. *Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile Riemann-Darboux pe mulţimea măsurabilă Jordan A, atunci toate integralele care apar în relaţiile de mai jos există şi relaţiile sunt adevărate:*

(1) $\underbrace{\int \cdots \int}_{A} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \underbrace{\int \cdots \int}_{A} f + \beta \underbrace{\int \cdots \int}_{A} g$

(2) $\underbrace{\int \cdots \int}_{A} f = \underbrace{\int \cdots \int}_{A_1} f + \underbrace{\int \cdots \int}_{A_2} f$*, unde* $A_1 \cup A_2 = A$ *şi* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

(3) dacă $f \leq g$ pe A atunci

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{A} f \leq \underbrace{\int \cdots \int}_{A} g$$

(4) $|\underbrace{\int\cdots\int}_{A} f| \leq \underbrace{\int\cdots\int}_{A} |f|$

Demonstraţie. Analoagă cu cea făcuta pentru integrale duble. □

Remarca 63.3. Dacă f este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi mulţimea $A_1 \subseteq A$ este măsurabilă Jordan, atunci f este integrabilă Riemann-Darboux pe A_1.

Mai mult, dacă $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ şi $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, atunci:

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{A} f = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\int\cdots\int}_{A_i} f$$

Teorema 63.4. *Dacă $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\overline{A}$ este măsurabilă Jordan, atunci f este integrabilă Riemann-Darboux pe $\overline{A}$.*

Demonstraţie. Analoagă cu cea făcută pentru integrale duble. □

Definiţia 63.9. *O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ se zice continuă pe porţiuni dacă există o partiţie $P = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ a lui A şi funcţiile continue $f_i : A_i \to \mathbb{R} \quad i = 1, 2, ..., m$, astfel încât:*

$$f(x_1, ..., x_m) = f_i(x_1, ..., x_m) \quad \forall (x_1, ..., x_m) \in \mathring{A}_i$$

Teorema 63.5. *O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ continuă pe porţiuni este integrabilă Riemann-Darboux pe mulţimea măsurabilă Jordan A şi are loc egalitatea:*

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{A} f = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\int\cdots\int}_{A} f_i$$

Demonstraţie. Analoagă cu cea pentru integrala pentru integrale duble. □

Teorema 63.6. *Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A, atunci:*

$$m \cdot vol(A) \leq \underbrace{\int\cdots\int}_{A} f \leq M \cdot vol(A)$$

unde:

$$m = \inf\{f(x_1, ..., x_m) \mid (x_1, ..., x_m) \in A\} \qquad M = \sup\{f(x_1, ..., x_m) \mid (x_1, ..., x_m) \in A\}$$

Demonstraţie. Imediată. □

64 Calculul integralei Riemann-Darboux pe o mulţime n-dimensională măsurabilă Jordan.

Dorim să arătăm că în anumite condiţii calculul integralei Riemann-Darboux pe o mulţime n-dimensională măsurabilă Jordan se reduce la calcularea succesivă a unor integrale Riemann-Darboux pentru funcţii de o singură variabilă.
Considerăm la început cazul în care mulţimea A este un interval n-dimensional de forma:

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

Teorema 64.1. *Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi dacă pentru orice $x_1 \in [a_1, b_1]$, funcţia f_{x_1} defintă prin $f_{x_1}(x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $A_1 = [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$, adică integrala*

$$I(x_1) = \int \cdots \int_{A_1} f_{x_1}(x_2, ..., x_n)\, dx_2 ... dx_n = \int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2 ... dx_n$$

există, atunci integrala iterată

$$\int_{a_1}^{b_1} I(x_1)\, dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2 ... dx_n)\, dx_1$$

există de asemenea şi are loc egalitatea:

$$\int \cdots \int_{A} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n = \int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2 ... dx_n)\, dx_1$$

Demonstraţie. Este similară cu cea făcută pentru integrale duble.

□

Remarca 64.1. Această teoremă reduce calculul integralei $\int \cdots \int_{A} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n$ la calculul succesiv a n integrale Riemann-Darboux pentru funcţii de o singură variabilă:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n = \int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} (... \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_n)\, dx_{n-1}) ... dx_1$$

Remarca 64.2. Teorema 64.1 este adevărată şi în cazul unor mulţimi n-dimensionale A mai complicate, ca şi în cazul bidimensional.

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime măsurabilă Jordan cu proprietatea că are loc egalitatea:

$$A = \bigcup_{x_1 \in [a_1, b_1]} \{x_1\} \times \Omega_{x_1}$$

unde $\Omega_{x_1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ este o mulţime măsurabilă Jordan pentru orice $x_1 \in [a_1, b_1]$.

Teorema 64.2. *Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi dacă pentru orice $x_1 \in [a_1, b_1]$, funcţia $f_{x_1} : \Omega_{x_1} \to \mathbb{R}$ defintă prin $f_{x_1}(x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este integrabilă Riemann-Darboux pe Ω_{x_1}, adică integrala*

$$I(x_1) = \int \cdots \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

există, atunci integrala iterată

$$\int_{a_1}^{b_1} I(x_1)\, dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} (\int \cdots \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2 \ldots dx_n)\, dx_1$$

există de asemenea şi are loc egalitatea:

$$\int \cdots \int_A f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} (\int \cdots \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2 \ldots dx_n)\, dx_1$$

Demonstraţie. Este similară cu cea făcută pentru integrale duble.

□

Teorema 64.3. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, măsurabilă Jordan şi $g : A \to g(A) = B \subset \mathbb{R}^n$ o funcţie bijectivă de clasă C^1 definită pe A având inversa de clasă C^1. Mulţimea B este măsurabilă Jordan şi are loc egalitatea:*

$$vol(B) = \int \cdots \int_A |\frac{D(g_1, ..., g_n)}{D(x_1, ..., x_n)}|\, dx_1 \ldots dx_n$$

Demonstraţie. Este similară cu cea din cazul bidimensional.

□

Teorema 64.4 (Schimbarea de variabilă)**.** *Fie A o mulţime deschisă, măsurabilă Jordan şi $g : A \to g(A) = B \subset \mathbb{R}^n$ o bijecţie de clasă C^1 definită pe A cu inversa de clasă C^1. Dacă funcţia $f : B \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe B, atunci funcţia $f \circ g \cdot \left|\frac{D(g_1, ..., g_n)}{D(x_1, ..., x_n)}\right| : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann-Darboux pe A şi are loc egalitatea:*

$$\int \cdots \int_B f(y_1, ..., y_n)\, dy_1 \ldots dy_n = \int \cdots \int_A f(g(x_1, ..., x_n)) \cdot \left|\frac{D(g_1, ..., g_n)}{D(x_1, ..., x_n)}\right| dx_1 \ldots dx_n$$

Demonstraţie. Este similară cu cea din cazul bidimensional. □

65 Curbe simple şi curbe simple închise.

Integralele curbilinii pot fi definite asemănător cu integralele definite. Pentru a face acest lucru este însă nevoie să introducem conceptul de curbă şi cel de lungime a unui arc de curbă. Vom prezenta aceste concepte într-un cadru particular care poate fi extins într-un mod natural la unul mai general.

Definiţia 65.1. *Curba simplă (arc simplu) este o mulţime de puncte* $C \subset \mathbb{R}^3$ *cu proprietatea că există un segment* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *şi o funcţie* $\varphi : [a, b] \to C$ *care are următoarele proprietăţi:*

a) φ *este bijectivă;*

b) φ *este de clasă* C^1 *şi* $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.

Punctele $A = \varphi(a)$ *şi* $B = \varphi(b)$ *de pe curbă se numesc extremităţi sau capete, iar* φ *se numeşte reprezentarea parametrică a curbei simple* C. *Vectorul* $\varphi\prime(t)$ *este tangent la curbă în punctul* $\varphi(t)$.

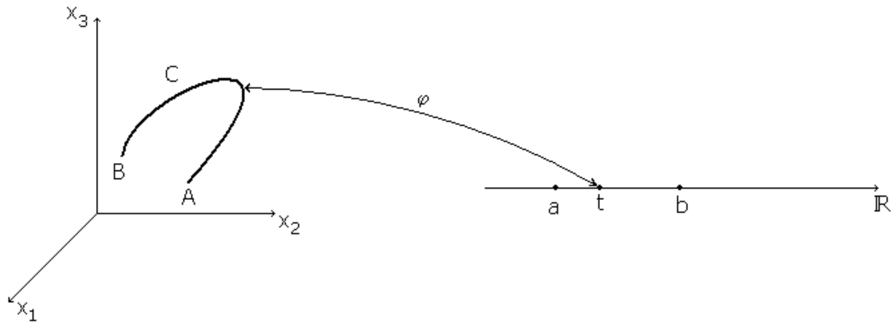


Figura 65.1:

Definiţia 65.2. *Curba simplă închisă este o mulţime de puncte* $C \subset \mathbb{R}^3$ *cu proprietatea că există un segment* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *şi o funcţie* $\varphi : [a, b] \to C$ *care are următoarele proprietăţi:*

a) φ *este bijectivă de la* $[a, b)$ *la* C *şi* $\varphi(a) = \varphi(b)$ *;*

b) φ *este de clasă* C^1 *şi* $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.

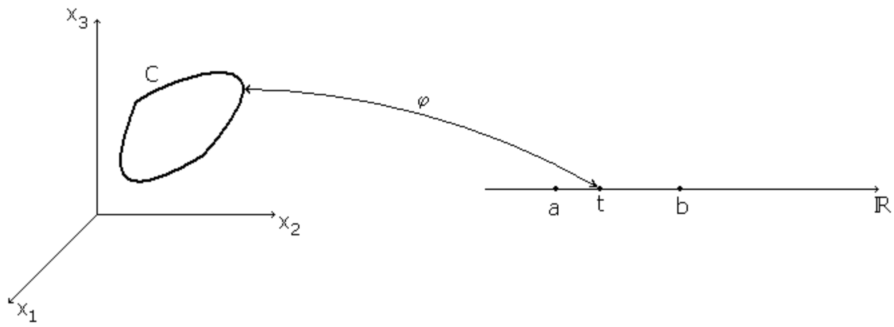


Figura 65.2:

Funcţia φ se numeşte reprezentarea parametrică a curbei închise C. Vectorul $\varphi\prime(t)$ este tangent la curbă în punctul $\varphi(t)$.

Exemplu 65.1. *Dacă* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ *şi* $h = (h_1, h_2, h_3)$ *sunt două puncte din* $\mathbb{R}^3$*, atunci segmentul* $[x^0, x^0 + h]$ *care uneşte punctele* $x^0, x^0 + h$ *este o curbă simplă* C*. În acest caz, segmentul* $[a, b]$ *este* $[0, 1]$*, iar funcţia* $\varphi : [0, 1] \to C$ *este:*

$$\varphi(t) = (x_1^0 + th_1, x_2^0 + th_2, x_3^0 + th_3)$$

Exemplu 65.2. *Cercul* C *definit prin:*

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

este o curbă simplă închisă. În acest caz, segmentul $[a, b]$ *este* $[0, 2\pi]$*, iar funcţia* $\varphi : [0, 2\pi] \to C$ *este:*

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

Remarca 65.1. Orice curbă simplă sau curbă simplă închisă are o infinitate de reprezentări parametrice.

Remarca 65.2. Punctele A, B, numite extremităţile curbei simple, nu depind de reprezentarea parametrică a curbei. Prin aceasta înţelegem că dacă $\psi : [c, d] \to C$ este o altă reprezentare parametrică a curbei simple C, atunci mulţimea de puncte $\{\psi(c), \psi(d)\}$ coincide cu mulţimea $\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \{A, B\}$. Acest fapt poate fi demonstrat prin reducere la absurd. Presupunând, de exemplu, că $\psi(c) \notin \{A, B\}$, se poate arăta că există $\tau_1 \in [c, d]$ astfel încât $\psi'(\tau_1) = 0$.
Astfel, oricare ar fi reprezentarea parametrică a segmentului $[x^0, x^0 + h]$ ce leagă punctele $A = x^0$ şi $B = x^0 + h$, capetele sunt punctele A şi B: de exemplu: $\psi(\tau) = x^0 + (2 - \tau)h$, $\tau \in [1, 2]$, $\psi(1) = x^0 + h = B$; $\psi(2) = x^0 = A$.

Folosind o reprezentare parametrică, putem defini lungimea curbei simple şi a curbei simple închise.

Definiţia 65.3. *Lungimea curbei simple (a curbei simple închise) este, prin definiţie, numărul* l*, definit prin:*

$$l = \int_a^b ||\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t) + \dot{\varphi}_3^2(t)} \, dt$$

unde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ *şi* $\dot{\varphi}_i(t) = \dfrac{d\varphi_i}{dt}(t)$*,* $i = 1, 2, 3$*.*

Remarca 65.3. Această definiţie este independentă de reprezentarea parametrică a curbei C. Altfel spus, dacă $\psi : [c, d] \to C$ este o a doua reprezentare parametrică a curbei C, atunci numărul

$$\int_c^d \|\psi'(\tau)\| \, d\tau$$

este egal cu numărul

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt$$

Egalitatea rezultă din teorema de schimbare de variabilă pentru funcţii de o singură variabilă, care se poate aplica ţinând seama de faptul că $\varphi'(t) \neq 0$ şi $\psi'(\tau) \neq 0$ pentru orice t şi pentru orice τ.

Exemplu 65.3. *Lungimea segmentului* $[x^0, x^0 + h]$ *este*

$$l = \int_0^1 \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}\, dt = \|h\|$$

iar lungimea cercului $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ *este*

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\pi$$

Exemplu 65.4 (Ilustrează independenţa lungimii de reprezentarea parametrică)**.** *Pentru cercul* $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ *alegem* $\varphi : [0, \pi] \to C$ *definită astfel*

$$\varphi(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$$

Utilizând această reprezentare obţinem:

$$l = \int_0^{\pi} 2\sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t}\, dt = 2\pi$$

aceeaşi valoare ca şi cea obţinută în cazul reprezentării

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Remarca 65.4. Condiţia $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ asigură faptul că o curbă simplă are doar două capete, acestea nedepinzând de reprezentarea parametrică. Altfel spus, există două puncte $A, B \in C$ astfel încât oricare ar fi reprezentarea parametrică $\psi : [c, d] \to C$ a lui C avem: $\{\psi(c), \psi(d)\} = \{A, B\}$.
În cazul $\psi(c) = A$ *şi* $\psi(d) = B$ *dacă* τ *parcurge segmentul* $[c, d]$ *de la c la d, atunci* $\psi(\tau)$ *parcurge curba* C *de la* A *la* B.
În cazul $\psi(c) = B$ *şi* $\psi(d) = A$ *dacă* τ *parcurge segmentul* $[c, d]$ *de la c la d, atunci* $\psi(\tau)$ *parcurge curba* C *de la* B *la* A.
Cele două sensuri de parcurs pe C, *de la* A *la* B *sau de la* B *la* A *se numesc orientări pe curba simplă şi din cele arătate până acum rezultă că pe o curbă simplă există două orietări şi oricare ar fi reprezentarea parametrică sensul de parcurs dat de* φ *este una din cele două orientări. Altfel spus mulţimea reprezentărilor parametrice ale curbei simple se descompune în două clase (submulţimi) disjuncte. Pentru toate reprezentările dintr-o clasă avem un sens de parcurs (o orientare) pentru toate reprezentările de cealaltă clasă avem sensul de parcurs opus (cealaltă orientare).*

Considerăm o curbă simplă C având reprezentarea $\varphi : [a, b] \to C$ a lui C pentru care sensul de parcurs este de la A la B ($\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$).

Dacă în formula lungimii curbei

$$l = \int_a^b \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau$$

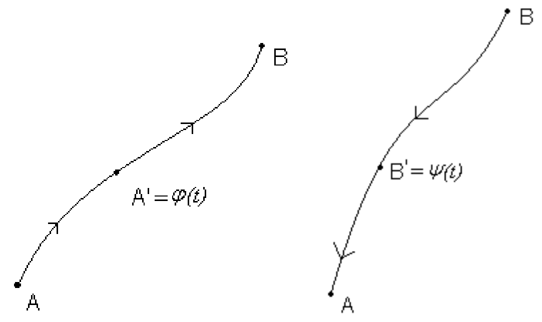


Figura 65.3:

înlocuim limita superioară b cu t obţinem o funcţie care depinde de t, $s_A(t)$, dată de

$$s_A(t) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau$$

Valoarea $s_A(t)$ reprezintă lungimea arcului de curbă $AA' \subset C$, unde $A' = \varphi(t)$ (AA' este doar o parte a curbei C).
Funcţia s_A este definită pe intervalul închis $[a, b]$ şi este o bijecţie de la $[a, b]$ la $[0, l]$, $s_A(a) = 0$ şi $s_A(b) = l$. Mai mult, s_A şi s_A^{-1} sunt funcţii de clasă $\mathbb{C}^1$.
Funcţia s_A^{-1} poate fi folosită pentru a construi o reprezentare parametrică remarcabilă a curbei simple: anume $\widetilde{x}_A : [0, l] \to C$, $\widetilde{x}_A = \varphi \circ s_A^{-1}$. În această reprezentare parametrică a lui C, $s \in [0, l]$ este parametrul şi $\widetilde{x}_A(0) = A$, $\widetilde{x}_A(l) = B$, iar dacă s parcurge $[0, l]$ de la 0 la l, atunci $\widetilde{x}_A(s)$ parcurge C de la A la B. Reprezentarea $\widetilde{x}_A$ este canonică în cazul orientării de la A la B. Parametrul s este lungimea arcului de curbă $A\widetilde{x}_A(s)$. Nu mai există o altă reprezentare parametrică cu aceste proprietăţi.
Dacă pentru aceeaşi curbă simplă C cu capetele A, B se consideră o reprezentare $\psi : [c, d] \to C$ pentru care sensul de parcurs este de la B la A ($\psi(c) = B$ şi $\psi(d) = A$) şi dacă în formula lungimii curbei

$$l = \int_c^d \|\psi'(\tau)\|\, d\tau$$

înlocuim limita superioară d cu t, obţinem o funcţie care depinde de t, $s_B(t)$, dată de

$$s_B(t) = \int_c^t \|\psi'(\tau)\|\, d\tau$$

Valoarea $s_B(t)$ reprezintă de data aceasta lungimea arcului de curbă $BB' \subset C$, unde $B' = \psi(t)$.

Funcţia $s_B : [c, d] \to [0, l]$ este bijectivă, $s_B(c) = 0$, $s_B(d) = l$ şi s_B, s_B^{-1} sunt funcţii de clasă $\mathbb{C}^1$. Reprezentarea parametrică $\widetilde{x}_B = \psi \circ s_B^{-1}$ a curbei simple C are proprietatea $\widetilde{x}_B(0) = B$, $\widetilde{x}_B(l) = A$ şi dacă s parcurge $[0, l]$ de la 0 la l, atunci $\widetilde{x}_B(s)$ parcurge C de la B la A. Reprezentarea $\widetilde{x}_B$ este canonică în cazul orientării de la B la A, parametrul s

fiind în acest caz lungimea arcului $B\widetilde{x}_B(s)$ (este unica reprezentare parametrică cu aceste proprietăţi).

Exemplu 65.5. În cazul segmentului $[x^0, x^0+h]$ ce leagă punctele $A = x^0$ şi $B = x^0+h$, dacă se consideră reprezentarea parametrică $\varphi(t) = x^0+th$, $t \in [0,1]$, atunci sensul de parcurs este de la A la B, iar dacă se consideră reprezentarea parametrică $\psi(\tau) = x^0+(2-\tau)h$, $\tau \in [1,2]$, atunci sensul de parcurs este de la $B = x^0+h$ la $A = x^0$.

Cu reprezentarea φ, lungimea arcului de curbă AA' este dată de

$$s_A(t) = \int_0^t \sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\, d\tau = t \cdot \|h\|$$

cu $s_A(0) = 0$ şi $s_A(1) = \|h\|$.
Funcţia $s_A^{-1} : [0, \|h\|] \to [0,1]$ este dată de $s_A^{-1}(s) = \frac{s}{\|h\|}$, iar reprezentarea canonică $\widetilde{x}_A : [0, \|h\|] \to C$ este

$$\widetilde{x}_A(s) = (\varphi \circ s_A^{-1})(s) = x^0 + \frac{1}{\|h\|} \cdot s \cdot h.$$

Cu reprezentarea ψ, lungimea arcului de curbă BB' este dată de

$$s_B(t) = \int_1^t \|\psi'(\tau)\|\, d\tau = \int_1^t \sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\, d\tau = (t-1) \cdot \|h\|$$

cu $s_B(1) = 0$ şi $s_B(2) = \|h\|$.
Funcţia $s_B^{-1} : [0, \|h\|] \to [1,2]$ este dată de $s_B^{-1}(s) = 1 + \frac{s}{\|h\|}$, iar reprezentarea canonică $\widetilde{x}_B : [0, \|h\|] \to C$ este

$$\widetilde{x}_B(s) = (\psi \circ s_B^{-1})(s) = x^0 + (2 - 1 - \frac{s}{\|h\|}) \cdot h = x^0 + (1 - \frac{s}{\|h\|}) \cdot h$$

Reprezentarea $\widetilde{x}_A(s) = x^0 + \frac{1}{\|h\|} \cdot s \cdot h$ este canonică în cazul orientării de la A la B, iar reprezentarea $\widetilde{x}_B(s) = x^0 + (1 - \frac{s}{\|h\|}) \cdot h$ este canonică în cazul orientării de la B la A. În ambele reprezentări, parametrul s parcurge segmentul $[0, l]$.

La o curbă simplă închisă C nu mai avem două capete A şi B, ca să putem vorbi de parcurgerea curbei de la A la B sau de la B la A. Cu toate acestea, şi în cazul unei curbe simple închise, putem introduce două orientări care corespund la două sensuri de parcurgere a curbei. Calea este următoarea:
Pentru curba simplă închisă C considerăm o reprezentare parametrică $\varphi : [a,b] \to C$ şi punctul $A = \varphi(a)$ de pe C.
Deoarece $\varphi'(t) \neq 0$ dacă t creşte de la a la b atunci $\varphi(t)$ descrie curba parcurgând-o într-un sens. Această mişcare a lui $\varphi(t)$ este o orientare pe curbă. Mişcarea opusă pe C este orientarea opusă. Dacă $\psi : [c,d] \to C$ este o reprezentare parametrică oarecare a lui

C atunci dacă t creşte de la c la d mişcarea lui $\psi(t)$ se face conform uneia din cele două orientări: dacă $\frac{d}{d\tau}\left(\varphi\circ\psi^{-1}(\tau)\right)=\frac{dt}{d\tau}>0$ atunci $\varphi(t)$ şi $\psi(\tau)$ se mişcă în acelaşi sens dacă t creşte de la a la b şi τ creşte de la c la d; dacă $\frac{d}{d\tau}\left(\varphi\circ\psi^{-1}(\tau)\right)=\frac{dt}{d\tau}<0$ atunci $\varphi(t)$ şi $\psi(\tau)$ se mişcă în sensuri opuse când t creşte de la a la b şi τ creşte de la c la d.

Şi în cazul curbei simple închise C putem considera funcţia $s_A : [a,b]\to[0,l]$ definită prin:

$$s_A(t)=\int_a^t \parallel \varphi'(\tau)\parallel d\tau$$

$s_A(t)$ este lungimea arcului $A\varphi(t)$ descris de $\varphi(\tau)$ când τ creşte de la a la t.

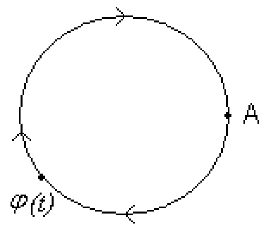


Figura 65.4:

Funcţia $s_A : [a,b]\to[0,l]$ e o bijecţie şi poate fi folosită pentru a defini o nouă reprezentare a lui C: $\overline{\overline{x}} : [0,l]\to C, \overline{\overline{x}}_A=\varphi\circ s_A^{-1}$. În aceasta reprezentare a lui $\mathcal{C}$, $s\in[0,l]$ este parametrul şi $\overline{\overline{x}}_A(0)=\overline{\overline{x}}_A(l)=A$, iar dacă s creşte de la 0 la l atunci $\overline{\overline{x}}_A(s)$ se mişcă pe C şi descrie curba C mişcându-se în acelaşi sens ca $\varphi(t)$. această reprezentare este canonică modulo punctul A (unică modulo A). Funcţia $\widetilde{\widetilde{x}}_A : [0,l]\to C$ definită prin $\widetilde{\widetilde{x}}_A(s)=\overline{\overline{x}}_A(l-s)$ este reprezentarea parametrică canonică care corespunde orientării opuse.
De exemplu în cazul cercului:

$$\mathcal{C}=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0\}$$

pentru reprezentarea parametrică $\varphi(t)=(\cos t,\sin t,0)$ cu $t\in[0,2\pi]$ avem: $\varphi(0)=(1,\,0,\,0)=A,\ s_A(t)=\int_0^t d\tau=t$; $\widetilde{x}_A(s)=(\cos s,\,\sin s,\,0),\ s\in[0,\pi]$; $\widetilde{x}_A(0)=(1,\,0,\,0)=A$; $\widetilde{x}_A(s)$ se mişcă pe cerc ca în figura 65.4, iar $\widetilde{\widetilde{x}}_A(s)=(\cos(2\pi-s),\,\sin(2\pi-s),\,0)$ şi se mişcă pe cerc ca în figura 65.5:

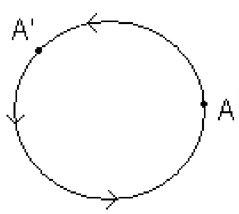


Figura 65.5:

Rezultă că o curbă simplă şi o curbă simplă închisă poate fi reprezentată parametric astfel:

$$x(s) = (x_1(s),\ x_2(s),\ x_3(s)),\ \ 0 \le s \le l$$

unde l este lungimea curbei şi $s \in [0, l]$ este lungimea arcului de curbă $x(0)x(s) \subset C$. Pentru o curbă simplă C există două reprezentări de acest fel ce corespund la cele două orientări ale lui C. Pentru o curbă simplă închisă C dacă se fixează un punct A pe C atunci avem de asemenea două reprezentări corespunzătoare la cele două orientări ale curbei.

66 Integrala curbilinie de speţa întâi.

Fie C o curbă simplă şi $x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ una din reprezentările parametrice ale ei în funcţie de arcul $s \in [0, l]$. Există doar două reprezentări de acest fel care corespund la cele două orientări ale lui C. Pentru a face o alegere să presupunem că reprezentarea considerată $\bar{x}(s)$ este cea corespunzătoare parcurgerii lui C de la A la B.

Fie acum f o funcţie reală de trei variabile, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită pe mulţimea deschisă Ω care include curba simplă, f continuă în punctele curbei, adică $f(x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ este continuă.
Considerăm o partiţie $P = \{A = Q_0, Q_1, ..., Q_m = B\}$ a curbei C (A şi B sunt capetele lui C)

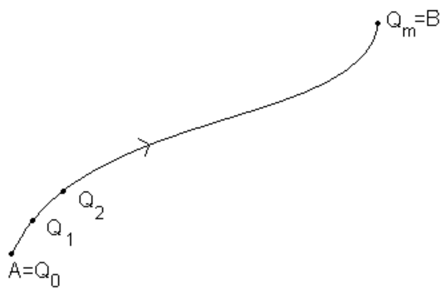


Figura 66.1:

şi valorile corespunzătoare ale lungimilor arcelor determinate de punctele partiţiei: $s_i =$ lungimea arcului AQ_i:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < ... < s_m = l$$

Alegem un punct oarecare pe fiecare porţiune de curbă:

$$R_1 \quad \text{între} \quad Q_0, Q_1,\ R_2 \quad \text{între} \quad Q_1, Q_2,\ ...\ ,\ R_m \quad \text{între} \quad Q_{m-1}, Q_m$$

$$R_i = (x_1(s_i'), x_2(s_i'), x_3(s_i')); \qquad s_i' \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = 1, dots, m$$

şi considerăm suma

$$I_m = \sum_{i=1}^{m} f(R_i) \cdot (s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} f(x_1(s_i'), x_2(s_i'), x_3(s_i')) \cdot (s_i - s_{i-1})$$

Această sumă I_m depinde de partiţia considerată şi de alegerea punctelor R_i. Dacă însă norma partiţiei

$$\Delta P = \max\{s_i - s_{i-1} \mid i = 1, 2, ..., m\}$$

tinde la zero, atunci indiferent de alegerea punctelor intermediare R_i, suma I_m tinde la un număr real I care se numeşte *integrala curbilinie de speţa întâi a lui f pe curba C* şi se notează cu

$$\int_C f\,ds$$

Acest fapt este imediat dacă observăm că funcţia $s \to f(x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ este continuă şi suma I_m este suma Riemann a acestei funcţii continue.
Din această observaţie rezultă şi egalitatea:

$$\int_C f\,ds = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s))\,ds$$

De aici rezultă în continuare că dacă $\varphi : [a, b] \to C$ este o reprezentare parametrică oarecare a curbei C, atunci are loc egalitatea:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|\,dt$$

De aici rezultă şi independenţa de orientare a integralei curbilinii de speţa întâi.

Prin urmare, integrala curbilinie este egală cu o integrală Riemann obişnuită într-o singură dimensiune şi are proprietăţi similare cu aceasta.

Propoziţia 66.1. *Au loc următoarele egalităţi:*

a) $\displaystyle\int_C k \cdot f\,ds = k \cdot \int_C f\,ds$

b) $\displaystyle\int_C (f + g)\,ds = \int_C f\,ds + \int_C g\,ds$

c) $\displaystyle\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$

unde curba C este reuniunea arcelor disjuncte C_1, C_2.

Toate aceste integrale sunt independente de orientarea curbei C.
Integralele curbilinii de speţa întâi pe curbe simple închise se definesc în mod analog.
Pentru integrale curbilinii pe curbe închise C se foloseşte adesea şi simbolul

$$\oint_C f\,ds$$

Pentru a calcula integrala curbilinie de speţa întâi a unei funcţii f pe o curbă simplă sau pe o curbă simplă închisă C se alege o reprezentare parametrică a curbei.

- Dacă această reprezentare este una canonică (în funcţie de elementul de arc s)

$$\overline{x}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \qquad 0 \le s \le l$$

atunci avem:

$$\int_C f\,ds = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s))\,ds$$

- Dacă reprezentarea este dată de funcţia $\varphi : [a,b] \to C$, atunci:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|\,dt$$

Remarca 66.1. Integralele curbilinii ale funcţiilor care sunt date numeric sau care conduc la integrale definite complicate se calculează numeric.

67 Integrala curbilinie de speţa a doua.

În diferite domenii ale fizicii (mecanică, electricitate etc.) şi ale chimiei, se consideră integrale curbilinii de speţa întâi pe curbe orientate din funcţii care depind de curbă de orientarea acesteia şi sunt de forma:

$$f \cdot \frac{dx_1}{ds} \quad , \quad g \cdot \frac{dx_2}{ds} \quad , \quad h \cdot \frac{dx_3}{ds}$$

unde $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$ sunt derivatele funcţiilor care apar în reprezentarea parametrică în funcţie de lungimea arcului s.

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$$

a curbei orientate.
Aceste integrale curbilinii se numesc *integrale curbilinii de speţa a doua* şi se notează astfel:

$$\int_C f\frac{dx_1}{ds}\,ds = \int_C f\,dx_1$$

$$\int_C g\frac{dx_2}{ds}\,ds = \int_C g\,dx_2$$

$$\int_C h\frac{dx_3}{ds}\,ds = \int_C h\,dx_3$$

În termenii reprezentării parametrice considerate aceste integrale de speţa a doua sunt egale cu următoarele integrale Riemann:

$$\int_C f dx_1 = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s))\frac{dx_1}{ds}ds = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos\alpha(s)ds$$

$$\int_C g dx_2 = \int_0^l g(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \frac{dx_2}{ds} ds = \int_0^l g(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos\beta(s) ds$$

$$\int_C h dx_3 = \int_0^l h(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \frac{dx_3}{ds} ds = \int_0^l h(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos\gamma(s) ds$$

unde $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ sunt unghiurile tangentei la curbă cu axele de coordonate Ox_1, Ox_2, Ox_3.

În termenii unei reprezentări parametrice oarecare $\varphi : [a, b] \to C$ care corespunde aceleaşi orientări a curbei aceste integrale de speţa a doua sunt egale cu următoarele integrale Riemann:

$$\int_C f dx_1 = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \frac{\dot\varphi_1(t)}{\sqrt{\dot\varphi_1^2(t) + \dot\varphi_2^2(t) + \dot\varphi_3^2(t)}} dt$$

$$\int_C g dx_2 = \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \frac{\dot\varphi_2(t)}{\sqrt{\dot\varphi_1^2(t) + \dot\varphi_2^2(t) + \dot\varphi_3^2(t)}} dt$$

$$\int_C h dx_3 = \int_a^b h(\varphi(t)) \cdot \frac{\dot\varphi_3(t)}{\sqrt{\dot\varphi_1^2(t) + \dot\varphi_2^2(t) + \dot\varphi_3^2(t)}} dt$$

Toate aceste integrale depind de orientarea curbei C. Dacă orientarea curbei se schimbă valoarea integralei schimbă semnul.
Pentru suma celor trei integrale de speţa a doua adesea se foloseşte notaţia simplificată:

$$\oint_C f\, dx_1 + g\, dx_2 + h\, dx_3$$

şi aceasta în termeni de integrală Riemann este

$$\int_0^l [f(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos\alpha(s) + g(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos\beta(s) + h(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos\gamma(s)]\, ds$$

68 Transformarea integralelor duble în integrale curbilinii.

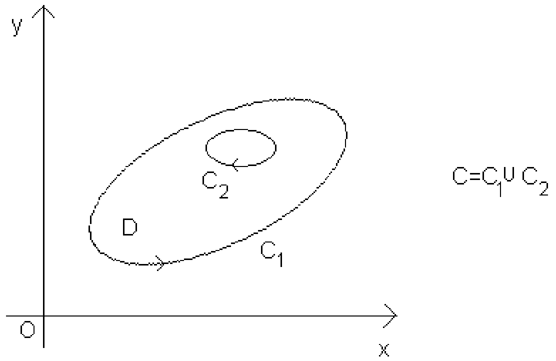
Integrala dublă pe un domeniu plan poate fi transformată în integrală curbilinie pe frontiera domeniului şi reciproc. Această transformare are atât importanţă teoretică cât şi importanţă practică şi se bazează pe teorema următoare.

Teorema 68.1 (Teorema lui Green în plan)**.** *Fie D un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră ∂D este o reuniune finită de curbe simple închise. Fie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funcţii de*

clasă C^1, definite pe un domeniu Ω care conţine $\overline{D}$, $\overline{D} \subset \Omega$. În aceste ipoteze, are loc egalitatea:

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_C f\,dx + g\,dy = \oint_C (f \cdot \cos\alpha + g \cdot \cos\beta) ds.$$

unde C este frontiera domeniului D şi pe fiecare componentă a lui C (care, prin ipoteză, este o curbă simplă închisă) orientarea este aleasă astfel încât domeniul D este în stânga atunci când parcurgem această componentă în sensul orientării alese.

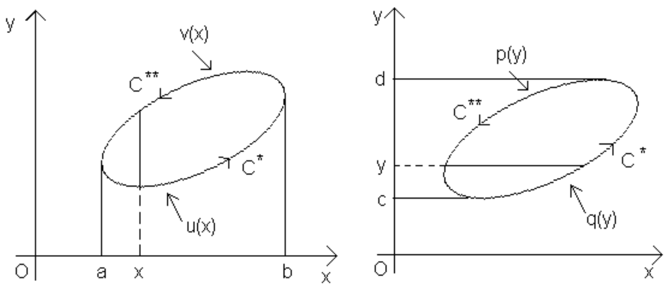


Demonstraţie. Facem demonstraţia teoremei în cazul particular în care domeniul D poate fi reprezentat sub forma:

$$D = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \quad \text{şi} \quad y \in [u(x), v(x)]\}$$

şi

$$D = \{(x, y) \mid y \in [c, d] \quad \text{şi} \quad x \in [p(y), q(y)]\}$$



În acest caz, avem:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy &= \int\limits_a^b [\int\limits_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy]\,dx = \int\limits_a^b [f(x,v(x)) - f(x,u(x))]\,dx \\
&= -\int\limits_a^b f(x,u(x))\,dx - \int\limits_b^a f(x,v(x))\,dx = -\int\limits_{C^*} f(x,y)\,dy - \int\limits_{C^{**}} f(x,y)\,dx \\
&= -\oint\limits_C f(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

deoarece $y = u(x)$, $x = x$ este reprezentarea parametrică a curbei orientate C^* şi $y = v(x)$, $x = x$ este reprezentarea parametrică a curbei orientate C^{**}.
În cazul în care domeniul D nu are proprietatea menţionată la începutul demonstraţiei, dar poate fi descompus într-o reuniune de subdomenii cu proprietatea menţionată, se aplică egalitatea stabilită pe subdomenii şi apoi se adună aceste egalităţii. Membrul drept al egalităţii obţinute în acest fel conţine integrala curbilinie pe C şi integrale pe curbe introduse pentru a partiţiona D în subdomenii. Fiecare din aceste integrale din urmă apare de două ori: o dată într-un sens de parcurs şi o dată în sensul opus. Prin urmare, aceste integrale curbilinii se reduc şi rămâne integrala curbilinie pe C. □

Acum prezentăm o a doua teoremă a lui Green, care se referă la transformarea integralei duble a Laplacianului unei funcţii în integrala curbilinie a derivatei normale a funcţiei.

Fie $w(x, y)$ o funcţie de clasă C^2 într-un domeniu Ω.

Definiţia 68.1. *Laplacianul funcţiei w este, prin definiţie, funcţia $\Delta w : \Omega \to \mathbb{R}$, definită astfel:*

$$\Delta w(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Să presupunem acum că Ω conţine un domeniu D de tipul celui considerat în teorema lui Green.

Teorema 68.2. *Are loc următoarea egalitate:*

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \Delta w\,dx\,dy &= \oint\limits_C \frac{\partial w}{\partial \overline{n}}\,ds = \oint\limits_C \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\cdot n_2\right) ds \\
&= \oint\limits_C \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot \cos\alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\cdot \cos\alpha_2\right) ds
\end{aligned}$$

Demonstraţie. În egalităţile de mai sus, expresiile

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\cdot n_2 = \frac{\partial w}{\partial x_1}\cdot \cos\alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\cdot \cos\alpha_2$$

sunt diferite exprimări ale derivatei normale.

Pentru demonstraţie, considerăm $f = -\dfrac{\partial w}{\partial y}$, $g = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ şi remarcăm egalitatea

$$\Delta w = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

Aplicăm teorema lui Green şi obţinem:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \Delta w \, dx\, dy &= \oint\limits_C -\frac{\partial w}{\partial y}\, dx + \frac{\partial w}{\partial x}\, dy = \oint\limits_C \left[-\frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} \right] ds \\
&= \oint\limits_C grad\ w \cdot \overline{n}\, ds
\end{aligned}$$

unde:

$$grad\ w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \qquad \text{şi} \qquad \overline{n} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

Vectorul $\overline{n}$ este versorul normalei exterioare la C. Aceasta pentru că vectorul $\overline{\tau} = \left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds} \right)$ este versorul tangentei la C şi $\overline{\tau} \cdot \overline{n} = 0$.

Produsul scalar $grad\ w \cdot \overline{n}$ este derivata normală $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{n}}$. Am obţinut astfel egalitatea:

$$\iint\limits_D \Delta w \, dx\, dy = \oint\limits_C \frac{\partial w}{\partial \overline{n}}\, ds$$

□

Fie $\overline{v} = \overline{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ o funcţie vectorială de două variabile reale x, y, definită pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de clasă C^1.

Definiţia 68.2. *Divergenţa lui $\overline{v}$ este, prin definiţie, funcţia reală $div\ \overline{v} : \Omega \to \mathbb{R}$, definită astfel:*

$$div\ \overline{v} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Teorema 68.3. *Dacă Ω conţine un domeniu D de tipul celui considerat în teorema lui Green, atunci are loc egalitatea:*

$$\iint\limits_D div\ \overline{v}\, dx\, dy = \oint\limits_C \overline{v} \cdot \overline{n}\, ds$$

unde $\overline{n}$ este versorul normalei exterioare la C.

Demonstraţie. Aplicând Teorema 68.1, obţinem:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D div\ \overline{v}\, dx\, dy &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_C -g\, dx + f\, dy \\
&= \oint\limits_C \overline{v} \cdot \overline{n}\, ds
\end{aligned}$$

□

69 Suprafeţe simple.

Pentru a prezenta integralele de suprafaţă este nevoie să prezentăm în prealabil câteva elemente de bază privind suprafeţele.

Definiţia 69.1. *O mulţime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte suprafaţă simplă dacă există o mulţime mărginită $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisă şi simplu conexă şi o funcţie $\varphi : D \to S$ cu următoarele proprietăţi:*

a) φ este bijectivă;

b) φ este de clasă C^1 şi vectorul

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \overline{N}_\varphi = (\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial v},\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial v},\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial v})$$

este nenul pentru orice $(u,v) \in D$.

Funcţia φ se numeşte reprezentare parametrică a suprafeţei simple S. Vectorii $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sunt tangenţi la S în punctul $\varphi(u,v)$.

Vectorul $\overline{N}_\varphi$ este vector normal la suprafaţă şi vectorul $\overline{n}_\varphi = \dfrac{\overline{N}_\varphi}{\|\overline{N}_\varphi\|}$ se numeşte versorul vectorului normal $\overline{N}_{\dot\varphi}$.

Exemplu 69.1. Mulţimea $S = \{(x_1,x_2,1) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < 1 \ , \ 0 < x_2 < 1\}$ este o suprafaţă simplă. O mulţime mărginită $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisă şi simplu conexă şi o funcţie $\varphi : D \to S$ care are proprietăţile $a)$ şi $b)$ sunt:

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 1 \ , \ 0 < v < 1\} \quad \text{şi} \quad \varphi(u,v) = (u,v,1)$$

Vectorul $\overline{N}_\varphi = (0,0,1)$ este normal la suprafaţa simplă S şi versorul vectorului normal $\overline{N}_\varphi$ este $\overline{n}_\varphi = (0,0,1)$.

Exemplu 69.2. Mulţimea $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \ , \ x_1 > 0 \ , \ x_2 > 0 \ , \ 0 < x_3 < 1\}$ este o suprafaţă simplă. O mulţime mărginită $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisă şi simplu conexă şi o funcţie $\varphi : D \to S$ care are proprietăţile $a)$ şi $b)$ sunt:

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < \frac{\pi}{2} \ , \ 0 < v < 1\} \quad \text{şi} \quad \varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Vectorul $\overline{N}_\varphi = (\cos u, \sin u, 0)$ este normal la suprafaţa simplă S şi versorul vectorului normal $\overline{N}_\varphi$ este $\overline{n}_\varphi = (\cos u, \sin u, 0)$.

Exemplu 69.3. Mulţimea $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \ , \ x_1 > 0 \ , \ x_2 > 0 \ , \ x_3 > 0\}$ este o suprafaţă simplă. O mulţime mărginită $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisă şi simplu conexă şi o funcţie $\varphi : D \to S$ care are proprietăţile $a)$ şi $b)$ sunt:

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < \frac{\pi}{2} \ , \ 0 < v < \frac{\pi}{2}\} \quad \text{şi} \quad \varphi(u,v) = (\cos\cdot\sin v, \sin u\cdot\sin v, \cos v).$$

Vectorul $\overline{N}_\varphi = -\sin v\cdot(\cos u\cdot\sin v, \sin u\cdot\sin v, \cos v)$ este normal la suprafaţa simplă S şi versorul vectorului normal $\overline{N}_\varphi$ este $\overline{n}_\varphi = -(\cos u\cdot\sin v, \sin u\cdot\sin v, \cos v)$.

Remarca 69.1. O suprafaţă simplă S are o infinitate de reprezentări parametrice.

- Direcţia vectorului normal $\overline{N}$ nu depinde de reprezentarea parametrică, dar sensul vectorului normal $\overline{N}$ depinde de reprezentarea parametrică a suprafeţei S. Dacă în locul reprezentării parametrice $\overline{x} = \varphi(u, v)$, cu $(u, v) \in D$ se consideră reprezentarea parametrică $\overline{x} = \psi(u', v')$, unde $\overline{x} = \psi(u', v') = \varphi(-u', v')$ cu $(u', v') \in D'$ obţinut din D prin transformarea $T : D \to D'$ definită prin $T(u, v) = (-u, v)$, atunci sensul vectorului normal $\overline{N}_\varphi$ construit cu reprezentarea parametrică φ este contrar sensului vectorului normal $\overline{N}_\psi$ construit cu reprezentarea parametrică ψ.

- În general, dacă $\overline{x} = \varphi(u, v)$ cu $(u, v) \in D$ şi $\overline{x} = \psi(u', v')$ cu $(u', v') \in D'$ sunt două reprezentări parametrice ale suprafeţei S, atunci:

  - dacă Jacobianul transformării $T = \psi^{-1} \circ \varphi$, $T : D \to D'$, $T(u, v) = (u', v')$ este pozitiv, atunci vectorii normalei $\overline{N}_\varphi$ şi $\overline{N}_\psi$ au acelaşi sens;
  - dacă Jacobianul transformării $T = \psi^{-1} \circ \varphi$, $T : D \to D'$, $T(u, v) = (u', v')$ este negativ, atunci vectorii normalei $\overline{N}_\varphi$ şi $\overline{N}_\psi$ sunt de sens contrar.

Remarca 69.2. Fie o suprafaţă simplă S dată prin reprezentarea parametrică $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $x = \varphi(u, v)$. O curbă simplă C situată pe S ($C \subset S$) poate fi obţinută din curba simplă $C' = \varphi^{-1}(C)$, $C' \subset D$. O reprezentare parametrică $u = g(t)$, $v = h(t)$ cu $t \in [a, b]$ şi $(u, v) \in D$ a curbei C', generează reprezentarea parametrică $\overline{x} = \varphi(g(t), h(t))$ a curbei C.

Exemplu 69.4. *În cazul suprafeţei simple*

$$S = \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < 1 \ , \ 0 < x_2 < 1\}$$

reprezentată parametric prin $\varphi(u, v) = (u, v, 1)$, *unde* $(u, v) \in (0, 1) \times (0, 1) = D$, *mulţimea*

$$C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \ , \ x_3 = 1 \ , \ x_1 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right\}$$

este o curbă simplă situată pe suprafaţa S. *Această curbă simplă se obţine din curba simplă* $C' = \varphi^{-1}(C) \subset D$ *având reprezentarea parametrică:* $u = t$, $v = t$, $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. *Reprezentarea parametrică a curbei* C *obţinută pe această cale este* $\overline{x}(t) = (t, t, 1)$.

Exemplu 69.5. În cazul suprafeţei simple

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \ , \ x_1 > 0 \ , \ x_2 > 0 \ , \ 0 < x_3 < 1\}$$

reprezentată parametric prin $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, unde $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < \frac{\pi}{2} \ , \ 0 < v < 1\}$, mulţimea

$$C = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \ , \ x_3 = \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \frac{\sqrt{3}}{2} < x_2 < \frac{1}{2}\right\}$$

este o curbă simplă situată pe suprafaţa S. Această curbă simplă se obţine din curba simplă $C' = \varphi^{-1}(C) \subset D$ având reprezentarea parametrică: $u = t$, $v = \frac{1}{2}$, $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Reprezentarea parametrică a curbei C obţinută pe această cale este $\overline{x}(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{1}{2}\right)$.

Remarca 69.3. Din formula de reprezentare parametrică $\overline{x} = \varphi(u(t), v(t))$ a lui $C \subset S$, rezultă că tangenta la curba C este dată de:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)$$

Vectorii:

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\right) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right)$$

sunt vectori tangenţi la suprafaţa S, ei sunt liniar independenţi şi $\dfrac{d\overline{x}}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dt}$.
În cazul din Exemplul 69.4, tangenta la curbă este vectorul $\dfrac{d\overline{x}}{dt} = (1, 1, 0)$ iar vectorii tangenţi la suprafaţă $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ sunt vectorii $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = (1, 0, 0)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = (0, 1, 0)$.
În cazul din Exemplul 69.5, tangenta la curbă este vectorul $\dfrac{d\overline{x}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0)$ iar vectorii tangenţi la suprafaţă $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ sunt vectorii $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = (0, 0, 1)$.

Vectorul normal la suprafaţă $\vec{N}$ considerat în Definiţia 69.1 este de fapt produsul vectorial al vectorilor tangenţi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$, adică:

$$\overline{N} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

şi este perpendicular pe toţi vectorii din planul tangent în punctul $\overline{x} = \varphi(u, v)$ la suprafaţa S.

Dacă suprafaţa S este dată prin reprezentarea parametrică $\overline{x} = \varphi(u, v)$ cu $(u, v) \in D$ şi curba C situată pe S ($C \subset S$) este dată prin reprezentarea parametrică $\overline{x} = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, atunci lungimea l a curbei C este dată de formula:

$$l = \int_a^b \sqrt{E\cdot\dot{u}^2 + 2F\cdot\dot{u}\cdot\dot{v} + G\cdot\dot{v}^2}\,dt$$

în care:

$$E = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(t), v(t))\right\|^2 \qquad F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(t), v(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(t), v(t))$$

$$G = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(t), v(t))\right\|^2 \qquad \dot{u} = \frac{du}{dt} \qquad \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

Expresia $E\cdot\dot{u}^2 + 2F\cdot\dot{u}\cdot\dot{v} + G\cdot\dot{v}^2$ de sub radical se numeşte *prima formă fundamentală a suprafeţei S*. Importanţa ei rezidă în faptul că permite calcularea lungimii curbelor situate pe S şi a unghiului dintre două curbe situate pe S.
Am văzut deja cum se calculează lungimea curbei C situată pe S. Pentru a vedea cum se calculează unghiul dintre două curbe situate pe S (curbe care se intersectează) considerăm curbele C_1 şi C_2 situate pe S date prin reprezentările parametrice:

$$C_1: \quad \overline{x} = \varphi(g(t), h(t)) \qquad C_2: \quad \overline{x} = \varphi(p(t), q(t))$$

cu $t \in [a,b]$ şi presupunem că aceste curbe se intersectează într-un punct $P \in S$, $P = \varphi(g(t_0), h(t_0)) = \varphi(p(t_0), q(t_0))$.
Vectorul tangent în P la curba C_1 este $\overline{T_1}$ şi vectorul tangent în P la curba C_2 este $\overline{T_2}$:

$$\overline{T_1} = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} \cdot \dot{g} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \cdot \dot{h}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} \cdot \dot{g} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \cdot \dot{h}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \cdot \dot{g} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \cdot \dot{h})$$

$$\overline{T_2} = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} \cdot \dot{p} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \cdot \dot{q}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} \cdot \dot{p} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \cdot \dot{q}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \cdot \dot{p} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \cdot \dot{q})$$

Unghiul în punctul de intersecţie P dintre C_1 şi C_2 este, prin definiţie, unghiul γ dintre $\overline{T_1}$ şi $\overline{T_2}$ în P şi astfel:

$$\cos\gamma = \frac{\overline{T_1} \cdot \overline{T_2}}{\|\overline{T_1}\| \cdot \|\overline{T_2}\|}$$

Întrucât:

$$\overline{T_1} \cdot \overline{T_2} = E \cdot \dot{g} \cdot \dot{p} + F(\dot{g} \cdot \dot{q} + \dot{h} \cdot \dot{p}) + G \cdot \dot{h} \cdot \dot{q}$$

$$\|\overline{T_1}\| = \sqrt{E \cdot \dot{g}^2 + 2F \cdot \dot{g} \cdot \dot{h} + G \cdot \dot{h}^2}$$

$$\|\overline{T_2}\| = \sqrt{E \cdot \dot{p}^2 + 2F \cdot \dot{p} \cdot \dot{q} + G \cdot \dot{q}^2}$$

obţinem că unghiul dintre cele două curbe se exprimă în termeni de E, F, G şi derivatele funcţiilor care reprezintă curbele.

Vom arăta în continuare cum se calculează aria unei porţiuni de pe suprafaţa S.

Aria A a unei porţiuni S' de pe suprafaţa simplă S, reprezentată parametric prin $\overline{x} = \varphi(u,v)$ cu $(u,v) \in D$, este dată de:

$$A = \iint\limits_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

unde R este partea din D ce corespunde porţiunii A.
Formula aceasta a ariei provine din egalitatea:

$$\Delta A = \sqrt{EG - F^2} \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

în care ΔA reprezintă aria unui paralelogram având laturile

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} \cdot \Delta u \quad \text{şi} \quad \frac{\partial\overline{x}}{\partial v} \cdot \Delta v$$

Această din urmă egalitate provine din definiţia produsului vectorial:

$$\Delta A = |\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} \cdot \Delta u \times \frac{\partial\overline{x}}{\partial v} \cdot \Delta v| = |\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{x}}{\partial v}| \cdot \Delta u \cdot \Delta v = \sqrt{EG - F^2} \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

Aria porţiunii S' se obţine împărţind S' în părţi mici $S_1, S_2, ..., S_n$ şi aproximând aria fiecărei părţi S_k prin aria paralelogramului din planul tangent la S într-un punct din S_k şi făcând suma ariilor aproximative. Aceasta se face pentru $n = 1, 2, ...$ astfel ca dimensiunile

celui mai mare S_k să tindă la zero atunci când $n \to \infty$. Limita acestor sume este integrala.

În diverse aplicaţii apar integrale de suprafaţă pentru care conceptul de orientare a suprafeţei este esenţial.

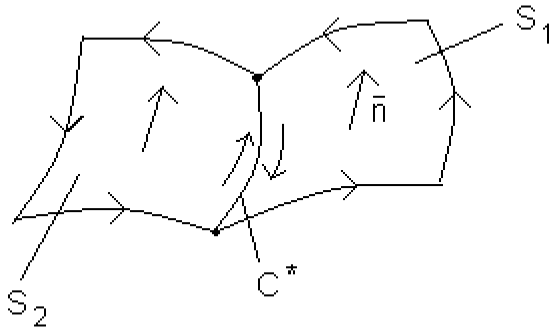
În cazul unei suprafeţe simple S pentru versorul normal $\overline{n}$ există două sensuri posibile şi la fiecare din aceste sensuri asociem o orientare a suprafeţei, aşa cum am făcut la orientarea curbelor cu ajutorul sensului de parcurs.

Mulţimea reprezentărilor parametrice ale suprafeţei simple se descompune în două clase (submulţimi) disjuncte. Pentru toate reprezentările dintr-o clasă avem una din cele două sensuri ale normalei (o orientare) pentru toate reprezentările din cealaltă clasă avem orientarea opusă a normalei (cealaltă orientare).
Dacă frontiera lui S este o curbă simplă închisă C, atunci putem asocia celor două orientări posibile ale suprafeţei simple S câte o orientare a lui C, aşa cum este reprezentat pe figura următoare:

Regula este următoarea: privind din vârful versorului normalei, sensul de parcurs pe curbă este contrar acelor de ceasornic.

Folosind acest concept putem extinde conceptul de orientare la suprafeţe care pot fi descompuse în suprafeţe simple (sunt suprafeţe simple pe porţiuni).

O suprafaţă S care se descompune în suprafeţe simple este orientabilă dacă putem orienta fiecare parte simplă astfel încât de-a lungul curbelor C^*, care sunt frontiere comune a două părţi S_1, S_2, direcţia pozitivă pe C^* relativ la S_1 să fie contrară direcţiei pozitive pe C^* relativ la S_2.



Exemplu 69.6. Suprafaţa unui paralelipiped este o suprafaţă netedă pe porţiuni, orientabilă.

Definiţia 69.2. *O suprafaţă S este orientabilă dacă pentru orice $P_0 \in S$ şi orice curbă simplă închisă $C \subset S$ care trece prin P_0 sensul normalei nu se inversează atunci când aceasta se deplasează pe C de la P_0 şi revine în P_0.*

Remarca 69.4. O suprafaţă simplă S este întotdeauna orientabilă. Există însă suprafeţe care nu sunt orientabile, cum este *banda lui Mőbius*.

70 Integrale de suprafaţă de speţa întâi.

Fie S o suprafaţă simplă de arie finită dată prin reprezentarea parametrică $\overline{x} = \varphi(u, v)$ cu $(u, v) \in D$ şi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $\Omega \subset S$.
Împărţim suprafaţa S în n suprafeţe mai mici $S_1, S_2, ..., S_n$, având ariile $A_1, A_2, ..., A_n$. În fiecare parte S_k alegem un punct oarecare P_k şi considerăm suma:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot A_k$$

Definiţia 70.1. *Dacă n creşte şi $S_1, S_2, ..., S_n$ sunt astfel încât cel mai mare S_k tinde la un punct pentru $n \to \infty$, atunci şirul de numere $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ tinde la un număr care nu depinde de diviziune şi de alegerea punctelor P_k. Această limită se numeşte integrala de suprafaţă de speţa întâi a funcţiei f pe S şi se notează cu*

$$\iint_S f(x_1, x_2, x_3)\, dS$$

De fapt, şirul $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ tinde la integrala dublă

$$\iint_D f(\varphi(u, v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

şi valoarea acestei integrale duble este integrala de suprafaţă de speţa întâi a lui f pe S:

$$\iint_S f(x_1, x_2, x_3)\, dS = \iint_D f(\varphi(u, v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Valoarea integralei de suprafaţă de speţa întâi nu depinde de reprezentarea parametrică a suprafeţei.

71 Integrale de suprafaţă de speţa a doua.

Fie S o suprafaţă simplă având reprezentarea parametrică $\overline{x} = \varphi(u, v)$, $(u, v) \in D$. Orientăm S cu versorul normalei $\overline{n}$, $\overline{n} = \frac{\overline{N}}{\|\overline{N}\|}$, dat de această reprezentare.

$$\overline{N} = (\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}) \qquad (u, v) \in D$$

Notăm cu α_1, α_2, α_3 unghiurile dintre $\overline{n}$ şi direcţiile pozitive ale axelor de coordonate Ox_1, Ox_2, Ox_3 şi avem:

$$\overline{n} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$$

Fie acum funcţiile $W_1 = W_1(x_1, x_2, x_3)$, $W_2 = W_2(x_1, x_2, x_3)$, $W_3 = W_3(x_1, x_2, x_3)$ definite şi continue în orice punct din S.

Definiţia 71.1. *Integralele de suprafaţă notate cu*

$$\iint_S W_1\,dx_2\,dx_3 \qquad \iint_S W_2\,dx_3\,dx_1 \qquad \iint_S W_3\,dx_1\,dx_2$$

definite prin:

$$\iint_S W_1\,dx_2\,dx_3 = \iint_S W_1\cdot\cos\alpha_1\,dS$$

$$\iint_S W_2\,dx_3\,dx_1 = \iint_S W_2\cdot\cos\alpha_2\,dS$$

$$\iint_S W_3\,dx_1\,dx_2 = \iint_S W_3\cdot\cos\alpha_3\,dS$$

se numesc integrale de suprafaţă de speţa a doua.

Integralele de suprafaţă de speţa a doua sunt integrale de suprafaţă de speţa întâi din funcţii care depind de suprafaţă şi de orientarea suprafeţei.
Este clar că valoarea unei asemenea integrale depinde de $\overline{n}$ (de reprezentarea parametrică) care defineşte o orientare a lui S. Trecerea la orientarea opusă corespunde înmulţirii cu -1 a integralei, deoarece componentele $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ ale lui $\overline{n}$ se înmulţesc cu -1.

Suma celor trei integrale de suprafaţă de speţa a doua poate fi scrisă într-o formă simplă alegând o notaţie vectorială:

$$\overline{W} = (W_1(x_1, x_2, x_3), W_2(x_1, x_2, x_3), W_3(x_1, x_2, x_3))$$

şi obţinem:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S W_1\,dx_2\,dx_3 + W_2\,dx_3\,dx_1 + W_3\,dx_1\,dx_2 &= \iint\limits_S (W_1\cdot\cos\alpha_1 + W_2\cdot\cos\alpha_2 + W_3\cdot\cos\alpha_3)\,dS\\ &= \iint\limits_S \overline{W}\cdot\overline{n}\,dS\end{aligned}$$

Fiecare integrală de suprafaţă de speţa a doua se exprimă ca o integrală dublă în termenii reprezentării parametrice:

$$\iint\limits_S W_1\,dx_2\,dx_3 = \iint\limits_D W_1(\varphi(u,v))\cdot\frac{D(\varphi_2,\varphi_3)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

$$\iint\limits_S W_2\,dx_3\,dx_1 = \iint\limits_D W_2(\varphi(u,v))\cdot\frac{D(\varphi_3,\varphi_1)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

$$\iint\limits_S W_3\,dx_1\,dx_2 = \iint\limits_D W_3(\varphi(u,v))\cdot\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

72 Proprietăţi ale integralelor de suprafaţă.

Integralele de suprafaţă de speţa întâi şi cele de speţa a doua sunt liniare şi aditive. Aceasta întrucât ele se reduc la integrale duble care au aceste proprietăţi.
Astfel avem:

a) $\iint\limits_S k\cdot f\,dS = k\cdot\iint\limits_S f\,dS$

b) $\iint\limits_S (f+g)\,dS = \iint\limits_S f\,dS + \iint\limits_S g\,dS$

c) $\iint\limits_S f\,dS = \iint\limits_{S_1} f\,dS + \iint\limits_{S_2} f\,dS$

Pe lângă aceste proprietăţi, integralele de suprafaţă au următoarele proprietăţi importante.

Fie A o mulţime mărginită şi închisă în $\mathbb{R}^3$ a cărei frontieră este o suprafaţă orientabilă S, simplă pe porţiuni.

Teorema 72.1 (teorema de divergenţă a lui Gauss)**.** *Dacă funcţia vectorială $\overline{u}$ este de clasă C^1 pe un domeniu care conţine mulţimea A, atunci are loc egalitatea:*

$$\iiint\limits_A div\,\overline{u}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iint\limits_S \overline{u}\cdot\overline{n}\,dS$$

unde $\overline{n}$ este versorul normalei exterioare la S.

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică. □

Consecinţa 72.1. *Dacă* $\overline{u} = grad\, f$*, atunci:*

$$\iiint\limits_A \Delta f\, dV = \iint\limits_S \frac{\partial f}{\partial \overline{n}}\, dS$$

şi pentru $\Delta f = 0$ *avem:*

$$\iint\limits_S \frac{\partial f}{\partial \overline{n}}\, dS = 0$$

Consecinţa 72.2. *Dacă* $\overline{u} = f \cdot grad\, g$*, atunci:*

$$div\, \overline{u} = f \cdot \Delta g + grad\, f \cdot grad\, g$$

$$\overline{u} \cdot \overline{n} = f \cdot (\overline{n} \cdot grad\, g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{n}}$$

şi

$$\iiint\limits_A (f \cdot \Delta g + grad\, f \cdot grad\, g)\, dV = \iint\limits_S f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{n}}\, dS$$

Această egalitate poartă numele de prima formulă a lui Green.

Schimbând rolurile lui f şi g şi scăzând se obţine egalitatea:

$$\iiint\limits_A (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f)\, dV = \iint\limits_S (f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{n}} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{n}})\, dS$$

care poartă denumirea de cea de a doua formulă a lui Green.

Fie S o suprafaţă simplă orientată, a cărei frontieră este o curbă simplă închisă C orientată conform regulii descrise după Remarca 69.4

Teorema 72.2 (Stokes). *Dacă funcţia vectorială* $\overline{v} = \overline{v}(x_1, , x_2, x_3)$ *este de clasă* C^1 *într-un domeniu care conţine suprafaţa* S*, atunci:*

$$\iint\limits_S (rot\, \overline{v}) \cdot \overline{n}\, dS = \int\limits_C \overline{v} \cdot \overline{t}\, ds$$

unde: $rot\, \overline{v} = (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})$, $\overline{n}$ *este versorul normalei la* S*, iar* $\overline{t}$ *este versorul tangentei la* C*.*

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică. □

73 Derivarea integralelor cu parametru.

Există situaţii în care funcţia care se integrează depinde nu numai de variabila de integrare x, ci şi de un parametru real t (de exemplu, timpul). Mai mult, domeniul pe care se calculează integrala depinde şi el de timpul t. În aceste cazuri valoarea integralei depinde şi ea de parametrul real t.

În această secţiune vom prezenta condiţii suficiente de derivabilitate în raport cu parametrul t a unei asemenea integrale.

Mai întâi considerăm cazul 1-dimensional:

$$I(t) = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,x)\,dx$$

Teorema 73.1. *Dacă funcţiile $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $[c,d]$ ($\varphi(t) < \psi(t)$, $\forall t \in [c,d]$) şi funcţia $f(t,x)$ este continuă în raport cu x pe intervalul $[\varphi(t), \psi(t)]$ şi este de clasă C^1 în raport cu t, atunci funcţia $I(t)$ este derivabilă şi avem:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,x)\,dx = \psi'(t)\cdot f(t,\psi(t)) - \varphi'(t)\cdot f(t,\varphi(t)) + \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică. □

Consecinţa 73.1. *Dacă funcţia $f(t,x)$ este continuă în raport cu x pe intervalul $[a,b]$ şi este de clasă C^1 în raport cu t, atunci:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a}^{b} f(t,x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Fie acum $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi $(a,b) \subset \mathbb{R}$ un interval deschis. Considerămm o funcţie $\overline{x} : (a,b) \times D \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 şi o submulţime mărginită $\omega_0 \subset D$ a cărei frontieră S_0 este o suprafaţă simplă pe porţiuni.
Pentru un t arbitrar, dar fixat, notăm cu $\omega(t)$ multimea:

$$\omega(t) = \{\overline{x}(t,\xi) \mid \xi \in \omega_0\}$$

şi presupunemm că jacobianul $\dfrac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}$ funcţiei $\overline{x}_t : \omega_0 \to \omega(t)$ definită prin $\overline{x}_t(\xi) = \overline{x}(t,\xi)$ este nenul.

Considerăm acum o funcţie $F : (a,b) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 şi integrala:

$$I(t) = \iiint\limits_{\omega(t)} F(t,x)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

Teorema 73.2. *Funcţia $I(t)$ este de clasă C^1 şi are loc egalitatea:*

$$\frac{dI}{dt} = \iiint\limits_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \iint\limits_{S(t)} F \cdot \overline{v} \cdot \overline{n}\, dS$$

unde $S(t)$ este frontiera lui $\omega(t)$, $\overline{v} = \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial t}$ şi $\overline{n}$ este versorul normalei exterioare a lui $S(t)$.

Demonstraţie. Demonstraţia este tehnică. □

BIBLIOGRAFIE

[1] R. Haggarty, *Fundamentals of Mathematical Analysis*; Addison-Wesley, 1989, Oxford

[2] A. B. Israel, R. Gilbert, *Computer-Supported Calculus*; Springer Wien New York, 2001, RISC Johannes Kepler University, Linz, Austria

[3] C. Lanczos, *Applied Analysis*; Sir Isaac Pitman, 1967, London

[4] F. Ayres, J. Cault, *Differential and Integral Calculus in Simetric Units*; Mc.Grow-Hill, 1988

[5] A. Jeffrey, *Mathematics for engineers ad scientists*; Van Nostrand, 1961

[6] E. Kreiszig, *Advanced engineering mathematics*; Wiley & Sons, 1967

[7] O. V. Manturov, N. M. Matveev, *A course of higher mathematics*; Mir, 1989